

Disuguaglianze alla Poincaré

Setting: $d \geq 1$ intero, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty]$.

Supponiamo Ω sia limitato (ipotesi diseducativa).

Allora vale la disuguaglianza

POINCARÉ

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Disuguaglianza SECONDO NATURA:
stimo la funzione con la sua
derivata

altrimenti è
brevemente falsa
(funzioni costanti)

Più in generale vale

POINCARÉ - SOBOLEV

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$q \leq p_*$$

Oss. Il caso interessante è quello in cui $p < d$.

- Il caso $p > d$ è facile perché stimo norma infinito con il gradiente e poi se Ω è limitato
- Il caso $p = d$ si deduce facilmente dal caso $p < d$, un po' come nei teoremi di compattezza.

(ogni $q < +\infty$ è in questo caso $q < (p_1)_*$ con $p_1 < d$)

Quindi basta trattare il caso $p < d$.

Dim (Diseducativa)

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c_1(q, p, d, \Omega) \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

↑
interpolazione

$$\leq c_1(q, p, d, \Omega) c_2(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

↑
immersione pura
che vale grazie a $u \in W_0^{1,p}$

↑↑

— o — o —

Oss. La dipendenza dall'insieme si paga solo nella disug. di interpolazione

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_{\Omega} |u(x)|^q \cdot 1 \, dx \\ &\leq \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^{p^*} \, dx \right\}^{\frac{q}{p^*}} \left\{ \text{meas}(\Omega) \right\}^{1 - \frac{q}{p^*}} \end{aligned}$$

↑ ↑ ↑
 $\frac{q}{p^*}$ $1 - \frac{q}{p^*} = \frac{p^* - q}{p^*}$

Facciamo radice q -esima ho dipendenza esplicita da Ω .

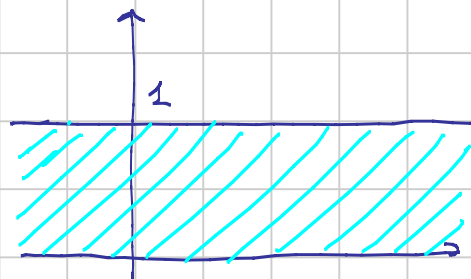
— o — o —

L'ESEMPIO Può valere una disug. alla Poincaré anche se Ω ha misura infinita.

In $\mathbb{R}^2$ prendiamo $\Omega := \mathbb{R} \times (0, 1)$.

Supponiamo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ abbia traccia nulla per $y=0$.

Allora vale



$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \underset{1}{\text{cost.}} \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

↑
basta $\frac{\partial u}{\partial y}$

Basta fare il conto per le u di classe C^∞ e poi si procede per approssimazione

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &= \left| \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) dt \right| \leq \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) \right|^{\frac{1}{p}} dt \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{uso che } u(x, 0) = 0 \end{aligned}$$
$$\leq \left\{ \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dy \right\}^{1/p} \underbrace{\left\{ \int_0^y 1 dy \right\}^{1/p'}}_{\leq 1}$$

Elevo alla p e integro in dx su tutto $\mathbb{R}$ e ho la tesi.

Morale: vale una disug. di tipo Poincaré quando ogni punto di Ω ha "abbastanza vicino" un sito in cui u si annulla.

Domanda: nell'esempio precedente, posso usare esponenti diversi?

[Hint: provare con $u(\lambda x, y)$]

Valgono disug. simili se u non si annulla?

$$\|u - u_\Omega\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

POINCARÉ - SOBOLEV - WIRTINGER

dove

$$u_\Omega := \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_\Omega u(x) dx$$

è la media di u in Ω .

Teorema Se $p < d$ (gli altri casi sono più facili)

la disug. PSW vale se

(i) Ω limitato

(ii) in Ω valgono i teoremi di immersione e/o compattezza

(iii) Ω connesso

(iv) $q \leq p_*$

Strategie dimostrative:

→ via immersioni

→ per assurdo

→ via pbm. di minimo

→ via pbm. di massimo

Osservazioni preliminari

① Posso supporre $u_\Omega = 0$. Altrimenti considero $v = u - u_\Omega$.

② Posso supporre $\|u\|_{L^q(\Omega)} \neq 0$

③ Posso supporre $\|u\|_{L^q(\Omega)} = 1$. Basta osservare che la disug. è omogenea.

④ Il problema è equiv. a dim. che

$$\inf_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla u\|^p dx : u \in W^{1,p}(\Omega), \|u\|_{L^q(\Omega)} = 1, u_\Omega = 0 \right\} > 0$$

Infatti, se lo dimostro, la disug. vale con

$$C(p, q, \Omega) = \frac{1}{\inf}$$

Se dimostro che $\inf = \min$, allora ho finito, perché il min. corrisponderà ad una certa $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ e questa non può avere $\nabla u_0 \equiv 0$ perché, essendo Ω connesso, sarebbe costante, e farebbe fatica ad avere $\|u_0\|_q = 1$ e $(u_0)_\Omega = 0$.

Supp. di voler dim. che min. esiste con metodo diretto

• Compattezza: da $\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq M$ e $\|u_m\|_{L^q(\Omega)} \leq 1$ ho un controllo su funzioni e derivate.

Se fosse $\boxed{p=q}$, avrei un controllo di $\|u_m\|_{1,p,\Omega} \leq M'$ e quindi avrei s.succ.

$$u_{m_k} \longrightarrow u_\infty \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

A quel punto è fatta per SCI e il fatto che i vincoli passano al limite per convergenza forte.

Se fosse $p \leq q < p_*$ me la caverei ugualmente. Avrei
 $\uparrow$ stretta

$$\|u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|u_m\|_{L^q(\Omega)} \leq c \Rightarrow \|u_m\|_{1,p,\Omega} \leq M'$$

e per i teo. di compattezza troviamo

$$u_{m_k} \longrightarrow u_\infty \quad \text{in } L^q(\Omega)$$

Se fosse solo $q < p_*$ avremmo

$$\|u_m\|_{L^1(\Omega)} \leq \text{cost} \|u_m\|_{L^q(\Omega)} \leq \text{cost}$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^1(\Omega)} \leq \text{cost} \|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{cost}$$

$$\rightarrow \|u_n\|_{1,1,\Omega} \leq M'$$

$$\Rightarrow \exists u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ in } L^1(\Omega)$$

↑
compattata con $p=1$

Ora è immediato che $(u_\infty)_\Omega = 0$, ma cosa possiamo dire di

$$\|u_\infty\|_{L^q(\Omega)} \quad ?$$

Questo purtroppo non è vero.

— 0 — 0 —

Commenti aggiunti dopo video:

① nel caso $q < p_*$ si poteva anche ottenere $\|u_n\|_{1,q,\Omega} \leq M'$ e da questa dedurre dalle immersioni compatte che

$$\exists u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ in } L^q(\Omega)$$

② in tutti i casi bisogna verificare che $u_\infty \in W^{1,p}(\Omega)$ e che

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u_\infty$$

almeno debolmente. Questo richiede la compattanza debole delle palle in $L^p(\Omega)$ ed un ulteriore passaggio di sottosuccessioni.

Ancora più importante: questo non funziona per $p=1$.

Ulteriori commenti alla lezione successiva.