

TEOREMI DI ESTENSIONE

Motivazioni: $\rightarrow$ teo. approx. deluxe } aperto con $\partial\Omega$ regolare
 $\rightarrow$ teo. immersione

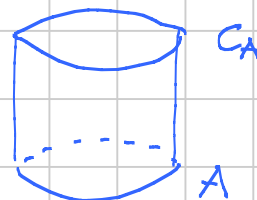
Caso modello $\leadsto$ cilindri

Caso generale $\leadsto$ aperto con $\partial\Omega$ regolare

Setting $d \geq 1$ intero $A \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ aperto

$$C_A := A \times (-1, 1) \text{ aperto in } \mathbb{R}^d$$

(x, y)
 $x = (x_1, \dots, x_{d-1})$



$$C_A^+ := A \times (0, 1) \text{ semicilindro}$$

Analogamente possiamo definire cilindri "infiniti"

$$C_A := A \times \mathbb{R} \quad C_A^+ := A \times (0, +\infty)$$

Obiettivo: estendere una funzione da C_A^+ a tutto C_A

$$[E_p u](x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{se } x \in A \quad y \in (0, 1) \\ u(x, -y) & \text{se } x \in A \quad y \in (-1, 0) \end{cases}$$

$\uparrow$
per parità

$$[E_d u](x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{se } x \in A \quad y \in (0, 1) \\ -u(x, -y) & \text{se } x \in A \quad y \in (-1, 0) \end{cases}$$

$\uparrow$
per disparità

Teorema E_p è un $(1,p)$ -estender per ogni $p \in [1, +\infty]$ ↑ incluso

cioè

se $u \in W^{1,p}(C_A^+)$ allora $E_p u \in W^{1,p}(C_A)$

Inoltre vale la stima

$$\|E_p u\|_{1,p,C_A} \leq 2 \|u\|_{1,p,C_A^+}$$

↑ forse =

e

$$D_{x_i}(E_p u) = E_p(D_{x_i} u) \quad \text{per } i = 1, \dots, d-1$$

$$D_y(E_p u) = E_p(D_y u)$$

Dim Facciamo le due verifiche separate

Caso D_{x_i} Devo dimostrare che

$$\int_{C_A} E_p u(x,y) D_{x_i} \varphi(x,y) dx dy = - \int_{C_A} E_p D_{x_i} u(x,y) \varphi(x,y) dx dy$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(C_A)$.

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) D_{x_i} \varphi(x,y) \\ &+ \int_A dx \int_{-1}^0 dy u(x,-y) D_{x_i} \varphi(x,y) \end{aligned}$$

$$= \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) D_{x_i} \varphi(x,-y)$$

$$= \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) \{ D_{x_i} \varphi(x,y) + D_{x_i} \varphi(x,-y) \}$$

$$\text{Pongo } \psi(x,y) := \varphi(x,y) + \varphi(x,-y)$$

$$= \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) D_{x_i} \psi(x,y) = \int_{C_A^+} u D_{x_i} \psi dx dy$$

↑ parte alta

RHS = ... stessi conti...

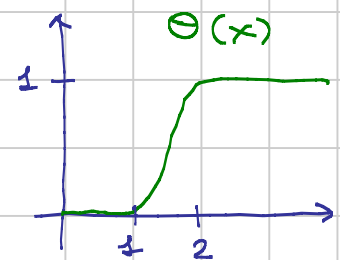
$$= - \int_{C_A^+} D_{x_i} u(x, y) \psi(x, y) dx dy$$

Mi sono ridotto a dimostrare che

$$\int_{C_A^+} u(x, y) D_{x_i} \psi(x, y) = - \int_{C_A^+} D_{x_i} u(x, y) \psi(x, y)$$

Sembrerebbe la definizione di $u \in W^{1,p}(C_A^+)$, ma non è così perché ψ non ha supporto compatto in C_A^+ , ma solo in C_A .

Serve approssimare. Prendo $\theta(x)$ come in figura e pongo, per $k \geq 1$:



$$\psi_k(x, y) := \psi(x, y) \theta(ky)$$

Ossevo che $\psi_k \in C_c^\infty(C_A^+)$ e quindi per ogni $k \geq 1$ vale

$$\int_{C_A^+} u(x, y) D_{x_i} \psi_k(x, y) dx dy = - \int_{C_A^+} D_{x_i} u(x, y) \psi_k(x, y) dx dy$$

e ora vorrei passare al limite. Posso perché

- al RHS ho conv. puntuale dominata $\psi_k(x, y) \rightarrow \psi(x, y)$
- al LHS invece pure perché

$$D_{x_i} \psi_k(x, y) = [D_{x_i} \psi(x, y)] \cdot \underbrace{\theta(ky)}$$

↑ Non viene toccato dalla D_{x_i}

Caso D_y Analogamente a prima

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_{C_A} u(x,y) D_y \varphi(x,y) dx dy \\ &= \int_{C_A^+} u(x,y) \{ D_y \varphi(x,y) + D_y \varphi(x,-y) \} dx dy \\ &= \int_{C_A^+} u(x,y) D_y \psi(x,y) dx dy \end{aligned}$$

dove $\psi(x,y) := \varphi(x,y) - \varphi(x,-y)$
 $\uparrow$ diverso da prima

Analogamente

$$\text{RHS} = - \int_{C_A^+} D_y u(x,y) \cdot \psi(x,y) dx dy$$

(i seguenti sono aggiustati da avere $E_y D_y u$ al RHS).

Ancora una volta devo dim. che

$$\int_{C_A^+} u D_y \psi = - \int_{C_A^+} D_y u \cdot \psi$$

che sarebbe ovvio se $\psi \in C_c^\infty(C_A^+)$. Osservo che ora ψ si annulla quando $y=0$, ma non basta ancora.

Prendo le ψ_k come prima, e spero di passare a lim

$$\int_{C_A^+} u D_y \psi_k = - \int_{C_A^+} D_y u \cdot \psi_k$$

Il RHS funziona come prima (puntuale dominata).

A LHS abbiamo due termini

$$\underbrace{\int_{C_A^+} u(x,y) D_y \psi(x,y) \cdot \Theta(ky)}_{\text{come prima}} + \int_{C_A^+} u(x,y) \psi(x,y) \cdot k \tilde{\Theta}(ky)$$

Per il secondo termine osserviamo che ψ è Lip. in C_A^+ perché ha gradiente limitato, e si annulla per $y=0$, quindi

$$|\psi(x, y)| \leq L y \quad \text{per } (x, y) \in C_A^+$$

Osservo anche che $\tilde{\Theta}(ky) \equiv 0$ appena $ky \geq 2$, cioè per $y \geq \frac{2}{k}$ e quindi

$$\begin{aligned} & \left| \int_{C_A^+} u(x, y) \psi(x, y) k \tilde{\Theta}(ky) dx dy \right| \\ & \leq \int_A dx \int_0^{\frac{2}{k}} |u(x, y)| \cdot L y \cdot k \underbrace{|\tilde{\Theta}(ky)|}_{\leq M} dy \\ & \leq LM \cdot 2 \underbrace{\int_A dx \int_0^{\frac{2}{k}} |u(x, y)| dy}_{\substack{\downarrow 0 \text{ per conv. puntuale dominata} \\ \text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}}} \end{aligned}$$

Oss. Non stiamo dicendo che l'int. per parti vale in C_A^+ anche quando ψ non ha supporto compatto.

Se mettessimo i termini di bordo

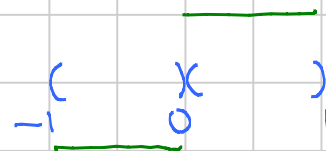
- nel caso di x_i verrebbero 0 perché la direzione x_i è tangenziale rispetto al tratto di bordo su cui $\psi \neq 0$
- nel caso di D_y verrebbero 0 perché ψ si annulla per $y=0$.



--- 0 --- 0 ---

Nemico #1 dell'estensione: bordi BILATERI, ad esempio non posso estendere da $\underbrace{(-1,0) \cup (0,1)}_{\Omega}$ ad $\mathbb{R}$

La funzione a lato sta in $W^{1,p}(\Omega)$,
ma non è estendibile Sobolev a tutto $\mathbb{R}$.



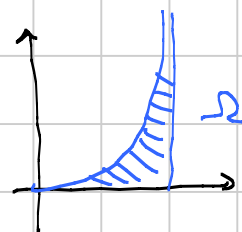
Stesso discorso in $\mathbb{R}^2$ con $\Omega =$ quadrato - asse

Nemico #2 dell'estensione: cuspidi o restringimenti

Esempio $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^{20} \}$

Facile esercizio di analisi 2 che

$u(x,y) = \frac{1}{x}$ sta in $W^{1,p}(\Omega)$



per alcuni p abbastanza grandi. (facile verifica per $p=4$)

Questa non è estendibile a tutto $\mathbb{R}^2$ come funzione $W^{1,4}$,
perché per immersione dovrebbe stare in L^∞ .