

Immersioni per $p > d$ (MORREY) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C(p,d) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}^d}$$

$$|u(y) - u(x)| \leq C(p,d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |y-x|^\alpha \quad \alpha = 1 - \frac{d}{p}$$

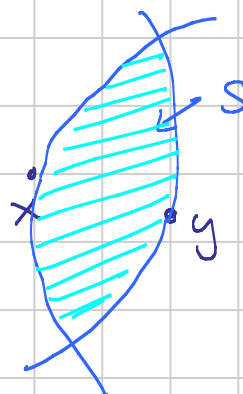
Dim Step 1 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e dimostro che u è α -Hölder con stima.

TRUCCO ZONA DI SCAMBIO

Pougo $\delta := |y-x|$

Pougo

$$S := B(x, \delta) \cap B(y, \delta)$$



$$|u(y) - u(x)| \leq |u(y) - u(z)| + |u(z) - u(x)| \quad \forall z \in S$$

Integro su S in dz :

$$\begin{aligned} \int_S |u(y) - u(x)| dz &= |u(y) - u(x)| \text{meas}(S) \\ &= |u(y) - u(x)| C_1(d) \delta^d \end{aligned}$$

Integro uno dei 2 termini al RHS

$$|u(z) - u(x)| = |\varphi(1) - \varphi(0)|$$

$$= \left| \int_0^1 \varphi'(t) dt \right| \leq \int_0^1 |\varphi'(t)| dt$$

$$= \int_0^1 |\langle \nabla u(x + t(z-x)), z-x \rangle| dt$$

$\varphi(t) := u(x + t(z-x))$
= segmento da x a z

da cui

$$|u(z) - u(x)| \leq \int_0^1 |\nabla u(x + t(z-x))| \cdot |z-x| dt$$

Integro in dz

$$\int_S |u(z) - u(x)| dz \leq \int_S dz \int_0^1 |\nabla u(x + t(z-x))| \cdot \underbrace{|z-x|}_{\leq \delta} dt$$

$$\leq \delta \int_0^1 dt \int_S \underbrace{|\nabla u(x + t(z-x))|}_y dz$$

$$t^d dy = dz$$

$$\leq \delta \int_0^1 dt \int_{B(x, t\delta)} |\nabla u(y)| \frac{1}{t^d} dy$$

dove varia y ?

$$y - x = t(z - x)$$

$$|y - x| = t|z - x| \leq t\delta \Rightarrow y \in B(x, t\delta)$$

$$= \delta \int_0^1 \frac{1}{t^d} dt \int_{B(x, t\delta)} |\nabla u(y)| \cdot \frac{1}{t^d} dy$$

$$\leq \delta \int_0^1 \frac{1}{t^d} dt \left\{ \int_{B(x, t\delta)} |\nabla u(y)|^p dy \right\}^{1/p} \left\{ \text{meas } B(x, t\delta) \right\}^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\leq \delta \|\nabla u\|_{L^p} \int_0^1 \frac{1}{t^d} c_2(d, p) t^{d \frac{p-1}{p}} \delta^{d \frac{p-1}{p}} dt$$

$$\leq c_2(d, p) \|\nabla u\|_{L^p} \delta^{1+d-\frac{d}{p}} \int_0^1 \frac{1}{t^d} t^{d-\frac{d}{p}} dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{d/p}} dt$$

$$= c_3(d, p) \|\nabla u\|_{L^p} \delta^{1+d-\frac{d}{p}}$$

Mettendo insieme LHS e RHS otteniamo

$$|u(y) - u(x)| C_1(d) \leq C_3(d, p) \|\nabla u\|_{L^p} |y-x|^{1+d-\frac{d}{p}}$$

da cui

$$|u(y) - u(x)| \leq C_4(d, p) \|\nabla u\|_{L^p} |y-x|^{1-\frac{d}{p}}$$

Step 2 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e ottengo che $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con stima

più senza una stima puntuale che mi procuro con teo. media integrale.

Dato $x \in \mathbb{R}^d$, osservo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^p dx \geq \int_{B(x, 3r)} |u(x)|^p dx = \text{meas}(B(x, 3r)) \cdot |u(\tilde{x})|^p$$

p.to. medio $\nearrow$

da cui

$$|u(\tilde{x})| \leq C(p, d) \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Ora come al solito

stima Hölder

$$|u(x)| \leq |u(\tilde{x})| + |u(x) - u(\tilde{x})|$$
$$\leq C(p, d) \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C_2(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \cdot 3r^{1-\frac{d}{p}}$$

da cui da tesi.

Step 3 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ Approssimo deluxe con $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e osservo che le u_n sono equi-Hölder ed equilim, quindi convergono unif. sui compatti (ad u).

Esercizio Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $p > d$, allora

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0.$$

Dim. Analisi 1: se un integrale improprio su $\mathbb{R}^d$ converge e la funz. è unif. continua, allora tende a 0. (dim. ricordata nel video)
Lo applico a $|u(x)|^p$ che ha int. impr. conv. ed è Hölder perché potenza di funzione Hölder + limitata.
— o — o —

Esercizio Dimostrare che esiste $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con $p < d$ che non tende a 0 all'infinito.

Dim. Trucco di riscalamento.

- Prendo $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$
- Prendo una successione $x_n \rightarrow +\infty$ abbastanza spaziata $|x_m - x_n| \geq 2$
- Considero

$$B(x_n, \frac{1}{n})$$

e ci metto dentro una riscalata di φ

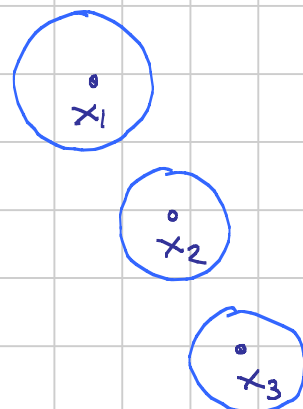
$$u_n(x) := \varphi((x - x_n)n)$$

e pongo
$$u(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Vediamo se converge da qualche parte

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p = \int_{B(x_n, \frac{1}{n})} \underbrace{\varphi((x - x_n)n)}_y^p dx \quad dy = n^d dx$$

$$= \int_{B(0,1)} \frac{1}{n^d} \varphi(y)^p dy$$



e quindi la relativa serie converge e quindi $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

$$\begin{aligned} \|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \int_{B(x_m, \frac{1}{m})} n^p |\nabla \varphi((x-x_m)m)|^p dx \\ &= \int_{B(0,1)} \frac{m^p}{n^d} |\nabla \varphi(y)|^p dy \\ &= \frac{1}{n^{\frac{d}{p}-1}} \int_{B(0,1)} |\nabla \varphi(y)|^p dy \end{aligned}$$

Elevando alla $\frac{1}{p}$ ottengo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \text{cost} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{d}{p}-1}}$$

che converge quando $d > 2p$ 😞

Come aggiusto le cose se $d > p$? Usando raggi del tipo $\frac{1}{n^2}$

Mi ritrovo $\frac{1}{n^{a(\frac{d}{p}-1)}}$ che converge se $a(\frac{d}{p}-1) > 1$
da cui trovo a
— o — o —

Altro costruttore di controesempi: funzioni radiali

Data $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ posso $u(x) := f(|x|)$

Fatto generale $u \in L^p(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} |f(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty$

$\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} |f'(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty$
↑ f deve verificarsi in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$

Un discorso analogo vale per $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$
 e ovviamente se sono in $B(0,R)$ mi riduco a fare

$$\int_0^R \dots r^{d-1} dr$$

Domanda: $\frac{1}{r^a} \in W^{1,p}(B(0,1))$ per quali p ?

$$\bullet \int_0^R \frac{1}{r^{ap}} r^{d-1} dr < +\infty \Leftrightarrow ap - d + 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow ap < d \Leftrightarrow p < \frac{d}{a}$$

$$\bullet \int_0^R \frac{1}{r^{(a+1)p}} r^{d-1} dr < +\infty \Leftrightarrow \boxed{p < \frac{d}{a+1}}$$

implica l'altra
 e assicura l'appartenenza
 a $W^{1,p}$

— o — o —