

V spazio vettoriale + struttura

$\mathbb{R}^d$

sp. di Hilbert (funziona tutte, tranne alcune eccezioni)

sp. di Banach (" niente, ")

sp. normati

sp. vett. localmente convessi (fin qui come nei Banach)

sp. vett. topologici

Def. (Prod. scalare) È una funzione $p: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, di solito indicata con $p(x, y) = \langle x, y \rangle$, con le 3 proprietà

$$(PS1) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall \dots$$

$$(PS2) \quad \langle ax_1 + bx_2, y \rangle = a \langle x_1, y \rangle + b \langle x_2, y \rangle \quad \forall \dots$$

$$(PS3) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ e vale } = 0 \text{ e solo se } x = 0.$$

(Simmetria, bi-linearità, definito positivo)

Def. (Norma) È una funzione $n: V \rightarrow \mathbb{R}$, di solito $n(x) = \|x\|$, con le 4 proprietà

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \text{ se e solo se } x = 0$$

$$(N3) \quad \|ax\| = |a| \cdot \|x\| \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in V$$

$$(N4) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x \in V, \forall y \in V$$

Oss. Dato un pr. scalare su V , allora

• abbiamo una norma $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ (verificare)

• abbiamo una distanza $\text{dist}(x, y) := \|x - y\|$

• abbiamo una topologia

• abbiamo una nozione di convergenza

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettori}}}{x_m} \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numeri}}}{x_\infty} \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \text{dist}(x_m, x_\infty) = \|x_m - x_\infty\| \rightarrow 0$$

Def. Uno sp. di Hilbert è un sp. vett. H su cui è definito un prod. scalare che induce una norma, che induce una distanza che lo rende uno sp. metrico **COMPLETO**

Prop. Sia V uno sp. vett. con prod. scalare. Allora norma e prod. scalare sono continui, cioè

$$\bullet x_n \rightarrow x_\infty \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x_\infty\|$$

$$\bullet x_n \rightarrow x_\infty \text{ e } y_n \rightarrow y_\infty \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_\infty, y_\infty \rangle$$

Anche le op. di sp. vett. sono continue

Dim. (Norma) Vale che

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \quad (\text{segue dalla triangolare})$$

da cui

$$0 \leq | \|x_n\| - \|x_\infty\| | \leq \|x_n - x_\infty\|$$

(Prod. scalare)

$$| \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_\infty, y_\infty \rangle | \leq | \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_\infty \rangle | + | \langle x_n, y_\infty \rangle - \langle x_\infty, y_\infty \rangle |$$

$$(\text{racc. + c.s.}) \leq \underbrace{\|x_n\|}_{\downarrow \|x_\infty\|} \cdot \underbrace{\|y_n - y_\infty\|}_{\downarrow 0} + \underbrace{\|y_\infty\| \cdot \|x_n - x_\infty\|}_{\downarrow 0}$$

(Op. di sp. vett.) $\leadsto$ esercizio

Oss. Se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora x_n è limitata, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|x_n\| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
(vale in uno sp. normato e opportunamente modificato in uno sp. metrico).

— 0 — 0 —

Basi ortonormali (sinonimi: basi Hilbertiane, sistemi ortonormali completi).

Def. Sia H uno sp. di Hilbert. Una base ortonormale è una successione $\{e_n\} \subseteq H$ (con $n \in \mathbb{N}$) tale che
(1) è ortonormale cioè

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

(2) genera H nel senso che $\text{span}(\{e_n\})$ è DENSO in H .

Achtung! Non è una base algebrica in generale, perché servirebbe $\text{span}(\{e_n\}) = H$.

Ora si chiede solo che ogni el. di H si possa approssimare con comb. lin. finite di $\{e_n\}$.

Def. (Componenti di un vettore) Sia H sp. di Hilbert con base $\{e_n\}$.

Allora per ogni $v \in H$ posso definire le sue componenti

$$v_n := \langle v, e_n \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

In questo modo ad ogni vettore si associa una succ. di numeri.

— o — o —

Teorema 1 (Esistenza della base)

Sia H uno sp. di Hilbert. Supponiamo che

(i) H è separabile (cioè esiste un sottospazio denso e NUMERABILE)

(ii) $\dim H = +\infty$ (dimensione algebrica)

Allora esiste una base ortonormale.

Teorema 2 (Proprietà delle componenti)

Sia $\{e_n\}$ una base ortonormale in uno sp. di Hilbert H .

Allora

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, e_n \rangle e_n \quad [\text{Aggiunta dopo video}]$$

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\langle v, e_n \rangle^2}_{\text{componenti}} \quad (\text{Pitagora in dim. infinita})$$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v, e_n \rangle \cdot \langle w, e_n \rangle$$

Oss. Il teo. 2 dice in particolare che la serie al RHS converge.

Morale: il teorema 2 permette di identificare gli elementi di H con successioni di numeri "quadrato sommabili". A quel pto lavoro solo con le successioni

In dim finita, gli spazi vett. "sono" $\mathbb{R}^n$
Gli spazi di Hilbert separabili di dim. infinita
"sono" $\mathbb{R}^\infty$

Lemma 1 (Caratterizz. serie Hilbertiane convergenti)

Sia $\{e_n\}$ base ortonorm. in Hilbert H . Sia $\{a_n\}$ succ. di numeri.

Allora

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n}_{\text{serie di vettori}} \text{ converge} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2}_{\text{serie di numeri}} \text{ converge}$$

Lemma 2 (Propri. delle serie Hilbertiane)

Siano $\{e_n\}$ ed H come sopra. Sia $\{a_n\}$ succ. di numeri t.c.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$$

e sia

$$v := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \quad (\text{ben definito per Lemma 1})$$

Allora

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

$$\langle v, e_n \rangle = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lemma 3 (Caratterizz. vettore nullo)

Siano $\{e_n\}$ ed H come sopra.

Sia $v \in H$ tale che

$$\langle v, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora $v = 0$.

Dim. Lemma 1 Siano $m \geq n$ numeri interi. Allora

$$\|a_n e_n + \dots + a_m e_m\|^2 = a_n^2 + \dots + a_m^2$$

$\uparrow$
geo. l. + ortogonalità di $\{e_n\}$

Pongo $\hat{S}_m := \sum_{k=0}^m a_k e_k$ e $S_m := \sum_{k=0}^m a_k^2$

Sopra abbiamo scritto

$$\|\hat{S}_m - \hat{S}_{m-1}\|^2 = |S_m - S_{m-1}|$$

da cui $\{\hat{S}_m\}$ è di Cauchy in $H \Leftrightarrow \{S_m\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.
Finale classico

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \text{ conv. in } H &\Leftrightarrow \{\hat{S}_m\} \text{ è di Cauchy in } H \\ &\Leftrightarrow \{S_m\} \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \text{ conv. in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Dim. Lemma 2 Chiamo $v_m = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_m e_m$ e
osservo che $v_m \rightarrow v$ e

$$\|v_m\|^2 = a_0^2 + \dots + a_m^2 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\langle v_m, e_k \rangle = a_k \quad \forall m \geq k$$

Passo al limite e uso la continuità di norma e prod. sc.

Dim. Lemma 3 Per la prima volta uso che lo span è denso.
Prendo v e prendo $\varepsilon > 0$. Per la densità trovo $v_\varepsilon \in \text{Span}$
tale che $\|v - v_\varepsilon\|^2 \leq \varepsilon$.

Ma allora

perché v_ε è comb. lin. finita di e_n

$$\varepsilon \geq \|v - v_\varepsilon\|^2 = \|v\|^2 + \overset{0}{\|v_\varepsilon\|^2} - 2 \langle v, v_\varepsilon \rangle \geq \|v\|^2.$$

$$\leadsto \|v\| = 0 \leadsto v = 0 \quad (\text{uso proprietà PS3}).$$

— 0 — 0 —