

3 parti: → Motivazioni e Calcolo delle Variazioni
→ Spazi di SOBOLEV
→ Introduzione all'Analisi Funzionale
— o — o —

Motivazioni e Calc. Var.

Sia X un insieme, sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ (talvolta $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) una funzione.

Problema Stabilire se esiste

$$\min \{ F(x) : x \in X \}$$

minimo valore, quindi
un numero

(se esiste è UNICO)

ed eventualmente

$$\operatorname{Argmin} \{ F(x) : x \in X \} = \{ x \in X : F(x) = \min \}$$

= p.ti di minimo

(possono essere NON unici)

Se il minimo non esiste, trovare l'inf. e come avvicinarsi all'inf, cioè una succ. $\{x_n\} \subseteq X$ t.c.

$$F(x_n) \rightarrow \inf \{ F(x) : x \in X \}$$

Tale succ. si chiama minimizzante o "infizzante".

Due metodi: → METODO INDIRETTO
→ METODO DIRETTO

METODO INDIRETTO

- Roadmap: ① Cerco di capire chi sarebbero i p.ti di min.
② Dimostro che lo sono

Esempio $X = \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 8y$

① $\nabla f(x,y) = 0 \leadsto \begin{cases} 2x+2=0 \\ 2y-8=0 \end{cases} \leadsto \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$

- ② Provo a dim. che $(x_0, y_0) = (-1, 4)$ è p.to di min. unico.
Ogni altro competitore (x, y) lo posso scrivere come
 $(x, y) = (x_0 + R, y_0 + k)$

Sostituisco:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0 + R, y_0 + k) \\ &= \underbrace{x_0^2 + 2x_0 R + R^2}_{\text{}} + \underbrace{y_0^2 + 2y_0 k + k^2}_{\text{}} + \underbrace{2x_0 + 2R}_{\text{}} - \underbrace{8y_0 - 8k}_{\text{}} \\ &= \underbrace{f(x_0, y_0)}_{\text{}} + \underbrace{R(2x_0 + 2) + k(2y_0 - 8)}_{=0 \text{ perché sono eq. risolte da } x_0 \text{ e } y_0} + \underbrace{R^2 + k^2}_{\geq 0} \\ &\geq f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

e vale il segno di $=$ se e solo se $R = k = 0$, cioè $x = x_0$
 $y = y_0$.

METODO DIRETTO

- Roadmap: ① Dimostro direttamente che min. esiste
② Poi eventualmente lo trovo.

Esempio di sopra

Considero $f(x,y)$ come sopra e osservo che

$$\lim_{|x|^2+|y|^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

Quindi per Weierstrass generalizzato (vedi Sez. Analisi 2) essendo f continua, ammette min. su tutto $\mathbb{R}^2$.

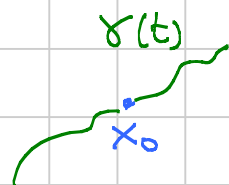
Una volta che min. esiste, procedo come ① di prima.

— 0 — 0 —

Metodo indiretto in generale

→ Variazione prima lungo una curva

→ Derivata secondo GATEAUX



Sia X insieme e $F: X \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in X$.

Sia $\delta > 0$ e sia $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow X$ t.c. $\gamma(0) = x_0$,
cioè una curva passante per x_0

Posso considerare

$$(-\delta, \delta) \ni t \rightarrow F(\gamma(t)) \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) := F(\gamma(t))$$

Supponiamo che $\varphi'(0)$ esista (è Analisi 1). Allora la
chiamo var. prima di F in x_0 lungo γ e pongo

$$\delta F(x_0, \gamma) := \varphi'(0)$$

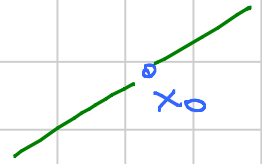
Teorema Se x_0 è pto di min. per F , allora

$$\delta F(x_0, \gamma) = 0$$

per ogni curva γ per cui esiste.

Caso speciale: X è uno sp. affine con sp. vett. di rif. V
(la diff. tra 2 el. di X sta in V)

Dato $x_0 \in X$ e $v \in V$ posso considerare



$$\varphi(t) := F(\underline{x_0 + tv})$$

retta per x_0 in direz. $v \in V$ (la $\gamma(t)$)

$$\delta F(x_0, v) := \varphi'(0) \text{ purché esista}$$

↑
variaz. prima
in direzione v = derivato di F . (deriv. direzionale)

Metodo diretto in generale Sia X un insieme.

Una nozione di conv. in X vuol dire "elencare tutte le succ. conv. ed i relativi limiti".

Più formalmente, poniamo

$$\text{Seq}(X) = \{ \text{succ. a valori in } X, \text{ cioè } f: \mathbb{N} \rightarrow X \}$$

Una noz. di conv. è un qualunque sottoinsieme di

$$\text{Seq}(X) \times X$$

Non chiedo nulla di speciale (ascoltare video).

Def. Si dice che un sottoinsieme $K \subseteq X$ è compatto se ogni succ. $\{x_n\} \subseteq K$ ammette s.succ. che converge ad un elemento di K (cioè che compare nell'elenco sopra).

Def. Una funzione $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice semicontinua infer. (s.c.i.) se per ogni $x_n \rightarrow x_\infty$ in X vale
$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) \geq F(x_\infty).$$

Teorema (Weierstrass) Sia X un insieme e $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che

(i) X compatto

(ii) F SCI

Allora

$$\min \{ F(x) : x \in X \}$$

esiste.

Dim. Per definizione di inf. esiste $\{x_n\} \subseteq X$ t.c.

$$F(x_n) \rightarrow \inf \{ F(x) : x \in X \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

"I"

Poiché X è CPT esiste $n_k \uparrow +\infty$ ed esiste $x_\infty \in X$ t.c.

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty$$

Ma allora

$$\begin{array}{ccccccc} I \leq F(x_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = I \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{def. di} & & \text{SCI} & & \text{perché} & & \text{def di } \{x_n\} \\ \text{inf.} & & & & F(x_n) \text{ ha lim.} & & \end{array}$$

Da cui $F(x_\infty) = I$ (e $I \in \mathbb{R}$).

Def. Sia X insieme e $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Si dice che F è COERCIVA se esiste $K \subseteq X$ compatto t.c.

$$\inf \{ F(x) : x \in X \} = \inf \{ F(x) : x \in K \}$$

Teorema (w. generalizzato) X e F come sopra.

Supponiamo che esista una uof. di conv. su X per cui

(i) F è coerciva

(ii) F è SCI.

Allora esiste il minimo.

Dim. (i) + (ii) $\Rightarrow$ esiste $\min \{ F(x) : x \in K \}$, ma questo lo è pure in generale.

Oss. Di solito la coercività segue dall'esistenza di un sottolivello non vuoto e contenuto in un cpt., più precisamente

$\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists K \subseteq X$ compatto t.c.

$\emptyset \neq \{ x \in X : F(x) \leq M \} \subseteq K$

(la battaglia per il min. si gioca nel sottolivello)

Oss. Le due richieste cpt + SCI sono in concorrenza

- Se metto tante succ. conv. ho CPT + facile e SCI + diff.
- Se metto poche succ. conv. è il contrario.

— o — o —