

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto limitato con $\partial\Omega$ decente.

Allora gli autovalori $\{\lambda_m(x)\}$ del Dirichlet Laplaciano sono C^∞

Dim. Risolvono $-\Delta u(x) = \lambda_m u(x)$

Si dimostra usando la regolarità ellittica (basta teoria L^2) che

$$u_m(x) \in H^k(\Omega) \quad \forall k \geq 0$$

($u_m \in L^2 \Rightarrow u_m \in H^2 \Rightarrow \text{RHS} \in H^1$ e $u_m \in H^2 \Rightarrow u_m \in H^3$
e così via)

[$\Delta u = f$ se $f \in H^1$ e $u \in H^2$, allora $u \in H^3$
 $f \in H^k$ e $u \in H^{k+1}$, allora $u \in H^{k+2}$]

Se una funzione sta in tutti gli H^k , allora sta in C^∞

Se $e_i(x)$ ed $e_j(x)$ sono autovettori ortogonali, allora
 $D e_i(x)$ e $D e_j(x)$ sono ortogonali come elementi di
 $L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$

Dim.
$$\int_{\Omega} \langle D e_i(x), D e_j(x) \rangle dx = - \int_{\Omega} e_i(x) \Delta e_j(x) dx$$

$$= \lambda_j \int_{\Omega} e_i(x) e_j(x) dx = 0$$

Nel caso $i=j$ otteniamo

$$\int_{\Omega} \|D e_i(x)\|^2 dx = \lambda_i$$

Grazie al fatto precedente possiamo dimostrare che

$$u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \iff u \in H_0^1(\Omega)$$

— o — o —

Caso speciale $\Omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}^2$

In questo caso gli autovalori di $-\Delta$ con DBC sono

$$n^2 + m^2 \quad \text{con } n, m \text{ interi non entrambi nulli e dispari}$$

con autovettori $\cos(nx) \cdot \cos(my)$

Dim. Che siano ortogonali è analisi 2.

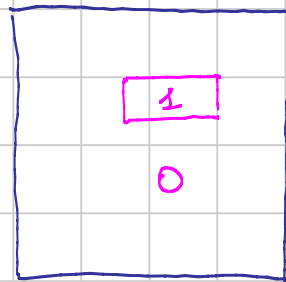
Che siano autovettori: basta calcolare il Laplaciano
La cosa non ovvia è che sono tutti gli autovettori. Per questo occorre dimostrare che spaziano un denso.

Ci sono vari modi

- Camille: Stone - Weierstrass.
- Del tutto elementare: basta saper approssimare un sottoinsieme di L^2 che spaziano un denso.

Scegliamo le funzioni caratteristiche dei rettangolini contenuti in Ω

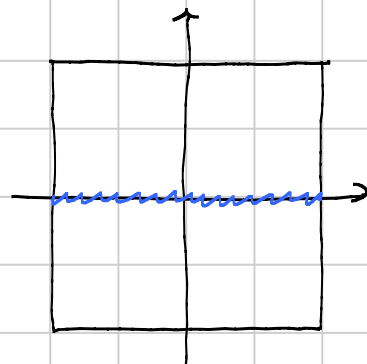
Idea: sono prodotto di caratteristiche in una variabile, quindi basta approx. separatamente i due fattori e moltiplicare tutto.



— o — o —

[Aggiunto dopo video: quello detto sopra è incompleto, nel senso che non si possono usare solo coseni. Il motivo è che in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gli autovalori sono n^2 ($n \geq 1$) con autovettori $\cos(nx)$ per n dispari e $\sin(nx)$ per n pari. Quindi tanto valeva lavorare in $(0, \pi) \times (0, \pi)$, almeno c'erano solo seni.]

Data $u \in H_0^1$ (quadrato), consideriamo la sua traccia sull'asse x :



$$u(x, 0)$$

Per la teoria delle tracce sappiamo che ha senso e sta in L^2 , anzi pure un po' meglio $\left(\frac{p(d-1)}{d-p}\right)$

Claim: immagine della traccia (cioè le funzioni sul segmento che sono traccia di qualcosa in H^1) è $H^{1/2}$.

Dim. 1ª parte: la traccia sta in $H^{1/2}$

$$u(x, y) = \sum_{m, n} u_{m, n} \cos(mx) \cos(ny)$$

Ora

$$u \in H_0^1 \Leftrightarrow \sum_{m, n} (m^2 + n^2) u_{m, n}^2 < +\infty \Leftrightarrow u \in D(A^{1/2})$$

$$\text{Tr } u(x) = \sum_{m, n} u_{m, n} \cos(mx) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ y=0 \end{matrix}$$

$$= \sum_m \underbrace{\left(\sum_n u_{m, n} \right)}_{v_m} \cos(mx)$$

La tesi è che $\sum_m m v_m^2 < +\infty$

(in dim. 1 gli autovalori sono m^2 , quindi con $A^{1/4}$ gli autov. sono $\sqrt{m}$ e al $\square$ viene m)

Come stimiamo i v_m :

$$v_m = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m^2 + n^2} \cdot u_{m,n} \cdot \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + n^2) u_{m,n}^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} \right\}^{1/2}$$

e quindi

$$\sum_{m=1}^{\infty} m v_m^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} (m^2 + n^2) u_{m,n}^2 \quad m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2}$$

$\leq$ costante per un fatto di Analisi 1

$< +\infty$

quindi la traccia sta in $H^{1/2}$.

2^a parte: se $v \in H^{1/2}$, allora è traccia di una $u \in H_0^1$

Ora abbiamo $v(x) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \cos(mx)$ e sappiamo che

$$\sum_{m=1}^{\infty} m v_m^2 < +\infty$$

Vogliamo trovare $u(x, y) = \sum_{m,n} u_{m,n} \cos(mx) \cos(ny)$

tale che

$$\sum_{m,n} (m^2 + n^2) u_{m,n}^2 < +\infty \quad \text{e} \quad v_m = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}$$

Moralmente: ogni v_m lo dobbiamo ripartire in tanti $u_{m,n}$

Scelta conetta

$$\mu_{m,n} := \frac{\sigma_m}{m^2 + n^2} \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} \right)} \quad \uparrow \quad \text{dividere per questo è come moltiplicare per } m$$

La seconda condizione è ovvia per definizione. Resta da controllare la 1^a:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} (m^2 + n^2) \mu_{m,n}^2 &= \sum_{m,n} \frac{\sigma_m^2}{(m^2 + n^2)} \frac{1}{\left(\sum \dots \right)^2} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sum \dots \right)^2} \sigma_m^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^2 \frac{1}{\left(\sum \dots \right)} \sim \sum_{m=1}^{\infty} m \sigma_m^2 < +\infty \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Cose NON fatte durante il corso:

① Problemi di evoluzione

$$\begin{aligned} \mu_t &= \mu_{xx} + \sin \mu \\ \mu_{tt} &= \mu_{xx} + \sin \mu \end{aligned}$$

② Regolarità ellittica (L^p , Schauder, De Giorgi)

Dal p.to di vista tecnico:

→ teo. spettrale + generale

→ spazi BV (funzioni a variazione limitata)

→ teo. di rappresentazione del duale di $C_0(\Omega)$ = chiusura di $C_c(\Omega)$ risp. alla norma L^∞ (sono misure)

→ amenità "minori": top. deboli (e non solo conv.), sp. unif. convessi, ...

Enunciato preciso di teo. spettrale in generale

Sia H Hilbert (meglio se separabile) e sia $A: D(A) \rightarrow H$ operatore non limitato e autoaggiunto (simmetrico + il dominio è il massimo possibile).

Allora esistono

- uno spazio di misura (X, m, μ) decente
- una isometria lineare

$$i: H \rightarrow L^2(X, m, \mu)$$

- una funzione misurabile $\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i} & L^2(X, m, \mu) \\ \downarrow A & & \downarrow \text{applicazione} \\ & & u(x) \rightarrow \lambda(x)u(x) \\ H & \xrightarrow{i} & L^2(X, m, \mu) \end{array}$$

Oss. Serie e trasformata di Fourier rientrano in questo quadro.

