

LAPLACIANO COME OPERATORE NON LIMITATO

Caso Dirichlet

$$Au = -u''$$

$$(0, \pi)$$

$$D(A) = H^2 \cap H_0^1$$

$$\text{autovalori : } n^2 \quad (n \geq 1)$$

$$\text{autovettori : } \sin(nx) \quad (\text{a meno di costante})$$

Su un generico intervallo $(0, l)$ avremmo

$$\text{autovettori : } \sin\left(n \frac{\pi x}{l}\right) \quad \text{autovalori : } \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2$$

Caso Neumann

$$Au = -u''$$

$$(0, \pi)$$

$$D(A) = H^2 \text{ con NBC}$$

$$\text{autovalori : } n^2 \quad (n \geq 0)$$

$$\text{autovettori : } \cos(nx)$$

Caso Periodico

$$Au = -u''$$

$$(0, 2\pi)$$

$$D(A) = H^2 \text{ con PBC} \quad (u(0) = u(2\pi) \text{ e } u'(0) = u'(2\pi))$$

$$\text{autovalori : } n^2 \quad (n \geq 0)$$

$$\text{autovettori : } \sin(nx) \text{ e } \cos(nx)$$

(ogni autosp. ha dim 2)
tranne $\ker$ con dim = 1

Su un generico intervallo $(0, l)$ verrebbe

$$\text{autovettori : } \sin\left(n \frac{2\pi}{l} x\right) \text{ e } \cos\left(n \frac{2\pi}{l} x\right)$$

$$\text{autovalori : } n^2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2$$

Oss. In tutti e 3 i casi abbiamo una base di $L^2((0,1))$ costituita da autovettori (l'ortogonalità è banale analisi 1; la cosa non ovvia è lo span denso che in questo contesto segue dal teo. spettrale applicato all'inverso)

Prop. Prendiamo il caso Dirichlet in $(0, \pi)$.
Allora

$$u \in D(A^{1/2}) \iff u \in H_0^1((0, \pi))$$

(Più in generale $u \in D(A^s) \iff u \in H^{2s}((0, \pi))$ + opportune condizioni al bordo)

Dim. $\Rightarrow$ Ogni $u \in L^2((0, \pi))$ si scrive come

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$$

dove, a meno di costante, $u_n := \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) dx$

Ora

$$u \in D(A^s) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} u_n^2 < +\infty$$

Nel nostro caso $s = \frac{1}{2}$ e $\lambda_n = n^2$ abbiamo

$$u \in D(A^{1/2}) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$$

Poniamo

$$S_m(x) := \sum_{k=1}^m u_k \sin(kx)$$

Sappiamo che $S_m(x) \rightarrow u(x)$ in $L^2((0, \pi))$

Inoltre

$$S'_m(x) = \sum_{k=1}^n k u_k \cos(kx)$$

Ora $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k^2 < +\infty$ per ipotesi e $\{\cos(kx)\}$ sono una base ortonormale (a meno di costante) di $L^2((0, \pi))$. Quindi

$$S'_m(x) \rightarrow v(x) \quad \text{in } L^2((0, \pi))$$

Al solito modo $v(x) = \dot{u}(x)$ (derivata debole) quindi $u \in H^1$.
A questo p.to la convergenza $S_m(x) \rightarrow u(x)$ è pure uniforme (le S_m sono equi $\frac{1}{2}$ -Hölder). Poiché $S_m(0) = S_m(\pi) = 0$, passando al limite si ha che $u \in H^1_0$.

Oss. Abbiamo che

$$[A^{1/2}u](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \sqrt{\lambda_k}}}{k} u_k \sin(kx)$$

quindi $A^{1/2}u$ non è $\dot{u}$, ma

$$\|A^{1/2}u\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k^2 = \|\dot{u}\|_{L^2}^2$$

perché $\dot{u} = \sum_{k=1}^{\infty} k u_k \cos(kx)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Per ipotesi $u \in H^1_0((0, \pi))$ e vogliamo dim. che $u \in D(A^{1/2})$
cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$$

Utilizziamo formula per i coeff.:

$$\begin{aligned}
 u_n &:= \int_0^\pi u(x) \sin(nx) dx && \text{integro per parti e uso DBC} \\
 &= + \int_0^\pi u'(x) \frac{1}{n} \cos(nx) dx \\
 &= \frac{1}{n} \int_0^\pi u'(x) \cos(nx) dx
 \end{aligned}$$

Ora non basta fare c.s. per dedurre che $|u_n| \leq \frac{1}{n} \cdot \text{cost}$

Oss. chiave: $u_n = \frac{1}{n} v_n$ dove i v_n sono, sempre

a meno della solita costante, i coeff. di $u'(x)$ rispetto al sistema ortonormale $\{\cos(nx)\}$ (non serve nemmeno che spannano un denso)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$$

— 0 — 0 —

Esercizio Posto $H^s := D(A^{s/2})$, dimostriamo che le funzioni in H^s sono continue per $s > \frac{1}{2}$ (è l'equivalente di $W^{s,p}$ per spazi $W^{u,p}$)

Come al solito $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$ e per ipotesi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} u_n^2 < +\infty$$

Vorremmo dim. che la serie di sopra converge uniformemente. Basta dim. la convergenza totale, cioè che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$$

Usando l'ipotesi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n^s |u_n| \frac{1}{n^s} \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} u_n^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \right\}^{1/2}$$

$\uparrow$ conv. per hp $\uparrow$ conv. per $s > \frac{1}{2}$

— o — o —

Cosa succede in dim. più alta

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
 $\uparrow$ aperto limitato con
 $\partial\Omega$ decente

Caso Dirichlet

$$Au = -\Delta u$$

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

Claim: esiste $\{e_n(x)\} \subseteq L^2(\Omega)$ ed esiste $\{\lambda_n\} \subseteq (0, +\infty)$ crescente con $\lambda_n \rightarrow +\infty$ t.c.

$$-\Delta e_n(x) = \lambda_n e_n(x) \quad \forall n \geq 1$$

Per farlo, "basta" dimostrare che l'inverso del Laplaciano è simmetrico, compatto, iniettivo (lineare e ben definito)

Data $f \in L^2(\Omega)$ risolviamo $-\Delta u = f$ con DBC e poniamo $If := u$.

Buona definizione (esistenza e unicità): approccio variazionale oppure Lax-Milgram

Linearità e iniettività: facili

Simmetria: Gauss-Green + DBC $\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = \int_{\Omega} u \cdot \Delta v$

Compattezza: siano f_n limitate in L^2 . Siano u_n le corrispondenti soluzioni. Claim: le u_n sono compatte in L^2 .

Idea: ottenere stime su u_n e Du_n e usare teo. imm. cpt.
 $\uparrow$ gradiente

$$\|Du_n\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} \langle Du_n, Du_n \rangle dx = - \int_{\Omega} u_n \cdot \Delta u_n dx$$

$$= - \int_{\Omega} u_n(x) f_n(x) dx \leq \|u_n\|_{L^2} \cdot \|f_n\|_{L^2}$$

$\uparrow$
C.S.

$$\leq \text{cost.} \|Du_n\|_{L^2} \cdot \|f_n\|_{L^2}$$

$\uparrow$
Poincaré

Conseguenza: $\|Du_n\|_{L^2} \leq \text{cost} \cdot \|f_n\|_{L^2}$

e con Poincaré di nuovo $\|u_n\|_{L^2} \leq \text{cost} \|f_n\|_{L^2}$

Ne segue che le $\{u_n\}$ sono equi- H^1 , quindi rel. cpt. in L^2 .

Da qui tu poi è il teo. spettrale.

— o — o —