

BAIRE POINT Limite puntuale di funzioni continue

Teorema Sia X sp. metrico completo (ma forse basta sp. di Baire)
 sia Y sp. metrico. Siano $f_n: X \rightarrow Y$ e $f_\infty: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) f_n è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $f_n \rightarrow f_\infty$ puntualmente.

Allora l'insieme dei p.ti di disc. di f_∞ è un F_σ magro (e quindi f_∞ è continua su un G_δ denso)

Dim. L'insieme dei p.ti di disc. è F_σ per un fatto generale, essendo unione numerabile di chiusi del tipo

$$D_\varepsilon := \{x \in X : \forall r > 0 \exists (y, z) \in B_X(x, r)^2 \text{ t.c. } d_Y(f(y), f(z)) \geq \varepsilon\}$$

Resta da dim. che questi hanno Int = $\emptyset$.

Supponiamo per assurdo che non sia vero, cioè esiste

$$A_0 \subseteq D_{\varepsilon_0}$$

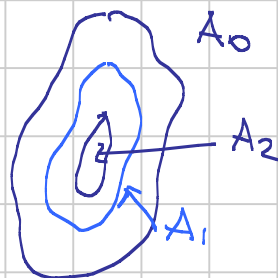
↑ aperto di X .

Ora A_0 è uno sp. di Baire, essendo X uno sp. di Baire.

In A_0 rendiamo quantitativa la conv. puntuale, anzi l'essere di Cauchy. Poniamo

$$C_k := \{x \in A_0 : \text{dist}_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{1}{k} \varepsilon_0 \quad \forall n \geq k, \forall m \geq k\}$$

$$= \bigcap_{m, n \geq k} \underbrace{\left\{x \in A_0 : \text{dist}_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{1}{k} \varepsilon_0\right\}}_{\text{chiusi perché controimm. di chiuso}}$$



Osservazioni:

- l'unione dei C_k è tutto A_0 per conv. puntuale
- vale

$$\text{dist}_Y(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall n \geq k, \forall x \in C_k$$

(mandando $n \rightarrow +\infty$ nella prec.)

Per Baire esiste $A_1 \subseteq C_{k_0}$
 $\uparrow$ aperto in A_0 , quindi anche in X .

Osserviamo che $f_{k_0}(x)$ è continua, quindi esiste $A_2 \subseteq A_1$ tale che

$$\text{dist}_Y(f_{k_0}(y), f_{k_0}(z)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall y \in A_2 \quad \forall z \in A_2$$

Ora per ogni y e z in A_2 vale

$$\begin{aligned} \text{dist}_Y(f_\infty(y), f_\infty(z)) &\leq \text{dist}_Y(f_\infty(y), f_{k_0}(y)) && \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \\ &+ \text{dist}_Y(f_{k_0}(y), f_{k_0}(z)) && \text{"} \\ &+ \text{dist}_Y(f_{k_0}(z), f_\infty(z)) && \text{"} \\ &\leq \frac{3}{4} \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Questo è un assurdo perché in ogni pallina contenuta in A_2 devono esserci due p.ti con immagini a distanza $\geq \varepsilon_0$ (siamo in D_{ε_0}).

— o — o —

Corollario Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile ovunque, allora $f'(x)$ è continua in un G_δ -denso.

Dim vale in senso puntuale

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

— o — o — $\uparrow$ succ. di funzioni continue.

OPERATORI NON LIMITATI

Def. (Operatore non limitato)

Sia V sp. normato, sia W sp. normato.

Un operatore (lineare) non limitato è un'applic. lineare

$$A : D(A) \rightarrow W$$

↑ "dominio di A " = s.sp. vettoriale di V

Moralmente: è un'applic. lineare definita solo su un s.sp.

Achtung! "Non limitato" si deve intendere come "non necessariamente limitato".

Ad esempio

- un operatore limitato (definito ovunque e continuo, quindi con norma operatoriale finita) è un operatore non limitato.
- L'operatore nullo definito solo su un s.sp. proprio è un operatore non limitato con il suo dominio $\neq V$.

Def. (Operatore di moltiplicazione su Hilbert separabile)

Sia H uno sp. di Hilbert. Un operatore non limitato

$$A : D(A) \rightarrow H$$

si dice operatore di moltiplicazione se esiste $\{e_n\}$ base ortonormale, ed esiste $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$A e_n = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Bruttalmente: è l'analogo in dim. infinita della matrice diagonale)

$$D(A) := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n : \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 a_n^2}_{\text{cond. che garantisce la conv. di } \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n e_n} < +\infty \right\}$$

↑
dominio max
in cui ha senso
fare A .

↑
compou.

cond. che garantisce la conv. di $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n e_n$

Oss. L'operatore A risulta definitibile ovunque se $\{\lambda_n\}$ è una succ. limitata.

Def. Un operatore non limitato si dice

- chiuso se ha grafico chiuso, cioè vale l'implicazione

$$\begin{array}{l} \{x_n\} \subseteq D(A) \\ x_n \rightarrow x_\infty \\ Ax_n \rightarrow y_\infty \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} x_\infty \in D(A) \\ Ax_\infty = y_\infty \end{array}$$

(è meno della continuità perché si assume $Ax_n \rightarrow y_\infty$)

- massimale se non esiste un operatore chiuso che lo estende propriamente.

— o — o —

Oss. Gli operatori di moltiplicazione sono SIMMETRICI, nel senso che

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall (v, w) \in [D(A)]^2$$

[Discorsi nel video sul significato di compatto]

Esempio più classico

Sia H sp. di Hilbert separabile. Sia $A : H \rightarrow H$ lineare, simmetrico e compatto (come nel teo. spettrale).

Supponiamo in aggiunta che A sia iniettivo (quindi o non è autovalore)

Allora l'inverso di A (definito solo sull'immagine) è un operatore di moltiplicazione e i suoi autovalori sono i reciproci di quelli di A .

— o — o —

Potenza di un operatore

Sia $A: D(A) \rightarrow H$ un operatore di moltiplicazione.

Supponiamo che tutti i λ_n siano > 0 .

Allora per ogni $s \in \mathbb{R}$ possiamo definire la potenza s -esima di A come l'operatore

$$A^s: D(A^s) \rightarrow H$$

definito da

$$A^s e_n := \lambda_n^s e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con dominio $D(A^s) := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n e_n : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2s} \mu_n^2 < +\infty \right\}$

- Oss.
- Se s è intero positivo, i λ_n possono essere qualunque
 - Se $s \in \mathbb{Z}$ basta $\lambda_n \neq 0$
 - Se $s > 0$ basta $\lambda_n \geq 0$
 - Data una qualunque $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo definire $f(A)$ ponendo

$$f(A) e_n = f(\lambda_n) e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ovviamente con un suo dominio.

In questo modo prodotto di funzioni diventa composizione di operatori!!! [Corretto dopo video]

La definizione è coerente con quella ottenuta "sostituendo A nello sviluppo di Taylor di f ".

— o — o —