

Dim. Lavoro sporco, parti facili(i) $\Rightarrow$ (ii) ovvio(ii) $\Rightarrow$ (iii) Per ipotesi $D \cap B_W(0,1)$ è immagine di $B_V(0, \hat{M})$
costante del solver
quantitativo in D (iii) $\Rightarrow$ (ii) Consideriamo come D l'immagine di f che è densa per l'ipotesi (iii). Ora si ripete la dimostrazione nel caso senza le chiusure.

$$w \in \text{immagine} \leadsto z := \frac{w}{2\|w\|_W} \in B_W(0,1) \cap \text{Imm}$$

$$\leadsto z = f(x) \text{ con } x \in B_V(0,R) \leadsto \hat{S}(y) : 2\|w\|_W x \dots$$

Finora non abbiamo usato Banach in partenza.

Dim. Lavoro sporco (ii) $\Rightarrow$ (i) SBAGLIATAPer ipotesi esiste solver quantitativo in $D \subseteq W$.Dato $w \in W$ qualunque, lo approssiamo con $w_n \xrightarrow{n_D} w$

$$\text{Per ogni } n \text{ esiste } v_n \in V \text{ con } f(v_n) = w_n \text{ e } \|v_n\|_V \leq \hat{M}\|w_n\|_W$$

Spero che $v_n \rightarrow v$ e pongo $S(w) = v$ e per continuità di f deduco che $S(w)$ è il solver cercato.

$$\|v_n - v_m\|_V = \|S(w_n) - S(w_m)\|_V = \|S(w_n - w_m)\|_V \leq \hat{M}\|w_n - w_m\|_W$$

NO: S non è
nec. lineare!!NO: $w_n - w_m$ non
è detto che $\in D$.

Lemma Sia W sp. normato, sia $D \subseteq W$ un denso.

Allora per ogni $w \in W$ esiste $\{w_n\} \subseteq D$ tale

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|_W \leq 2 \|w\|_W$$

Dim. Costruiamo i w_n induttivamente.

- Scegliamo w_1 t.c. $\|w - w_1\| \leq \frac{1}{8} \|w\|$
- Scegliamo w_2 t.c. $\|(w - w_1) - w_2\| \leq \frac{1}{16} \|w\|$
- $\vdots$
- Supponendo di aver scelto $w_1, \dots, w_n$, scegliamo w_{n+1} tale che

$$\|(w - \sum_{k=1}^n w_k) - w_{n+1}\| \leq \frac{1}{2^{n+3}} \|w\|$$

Per costruzione è evidente che la serie dei w_n converge a w .
Devo stimare le norme

$$\|w_1\| \leq \|w\| + \|w - w_1\| \leq \|w\| + \frac{1}{8} \|w\| \leq \|w\| + \frac{1}{2} \|w\|$$

$$\|w_2\| \leq \|(w - w_1)\| + \|(w - w_1) - w_2\|$$

$$\leq \frac{1}{8} \|w\| + \frac{1}{16} \|w\| \leq \frac{1}{4} \|w\|$$

In generale

$$\|w_n\| \leq \|(w - w_1 - \dots - w_{n-1})\| + \|(w - \dots) - w_n\|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \|w\| + \frac{1}{2^{n+2}} \|w\| \leq \frac{1}{2^n} \|w\|$$

Conclusione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\| \leq \|w\| + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|w\|}_{\|w\|} = 2\|w\|.$$

— o — o —

Oss. Con più risparmio si arrivava a $\sum \|w_n\| \leq (1+\varepsilon)\|w\|$.

Dim. lavoro sporco (ii) $\Rightarrow$ (i)

Dato $w \in W$ qualunque, considero $\{w_n\} \subseteq D$ come nel Lemma.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sappiamo che esiste $v_n \in V$ t.c.

$$f(v_n) = w_n \quad \text{e} \quad \|v_n\|_V \leq \hat{M} \|w_n\|_W$$

Claim $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge a $v \in V$ e possiamo porre $S(w) := v$.

Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_V \leq \hat{M} \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|_W \leq 2 \hat{M} \|w\|_W$$

$\uparrow$ stima $\uparrow$ Lemma

Questo dice che v è ben definito e $\|v\|_V \leq 2 \hat{M} \|w\|_W$
(qui abbiamo usato che V è Banach)

Resta da dimostrare che $f(v) = w$, ma questo segue dalla linearità e dalla continuità di f

$$f(v) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = w$$

$\uparrow$

vero per le somme parziali e
poi si passa al limite.

— o — o —

Teorema Sia H sp. di Hilbert, sia W sp. di Banach,
sia $f: H \rightarrow W$ lineare, continua e surgettiva.
Allora esiste solver quantitativo lineare.

Dim Sia $K := \ker(f)$, che è un s.sp. chiuso.
Per le solite storie

$$H = K \oplus K^\perp$$

↑ ortogonale, a sua volta s.sp. chiuso

Per restrizione consideriamo

$$\hat{f}: K^\perp \rightarrow W$$

Questa funzione è lineare, continua, iniettiva e surgettiva.

Dato $w \in W$ esiste $v \in H$ t.c. $f(v) = w$. Scrivo

$$v = \underbrace{v_1}_K + \underbrace{v_2}_{K^\perp} \quad \text{e osservo che} \quad w = f(v) = \underbrace{f(v_1)}_0 + f(v_2) = f(v_2)$$

Infine $K^\perp$ è almeno un Banach.

Quindi $\hat{f}$ è lineare e invertibile tra due Banach, quindi ammette un'inversa che è lineare e continua.

Questo è il solver cercato.

Oss. La stessa dimostrazione funziona in un Banach V se
vale il seguente enunciato:

"per ogni sottospazio chiuso $K \subseteq V$ esiste s.sp. chiuso
 $M \subseteq V$ tale che

↑
così è autom.
un Banach

$$V = K \oplus M$$

Un tale M si dice "supplementare topologico".

Fatto misterioso (purtroppo vero) : La proprietà di sopra vale in V se e solo se la norma in V è equivalente ad una norma che lo rende un Hilbert.

Ancora peggio : esistono V e W Banach ed esistono $f: V \rightarrow W$ lineari e continue e surgettive per cui

- esiste un solver qualitativo lineare (geom. 1)
- esiste un solver quantitativo (mappa aperta)
- NON esiste un solver quantitativo lineare.

(il loro ker non ha supplementare topologico)

— o — o —

Prossima puntata : il limite puntuale di funzioni continue non è detto che sia continuo.

Quanto può essere discontinuo ?

Risposta : poco ! È comunque continuo in un G_δ denso.

— o — o —