

BAIRE POINTTEOREMA DELLA MAPPA APERTA (e dintorni)

Setting: siano V e W sp. normati, e sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Dato $w \in W$, vogliamo risolvere l'eq.

$$f(v) = w$$

Def. Nel setting di sopra, definiamo

- solver qualitativo una funzione $S: W \rightarrow V$ tale che

$$f(S(w)) = w \quad \forall w \in W$$

- solver quantitativo una funzione $S: W \rightarrow V$ tale che

$$f(S(w)) = w \quad \forall w \in W$$

e

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \|S(w)\|_V \leq M \|w\|_W \quad \forall w \in W.$$

Domande:

- ① Esistono solver qualitativi ?
 - ② " " " lineari ?
 - ③ Esistono solver quantitativi ?
 - ④ " " " lineari ? (in questo caso è automaticamente continuo)
- o — o —

Risposta ① Siano X e Y insiemi, e sia $f: X \rightarrow Y$

Allora sono equiv:

(i) esiste solver qualitativo

(ii) f surgettiva

Dim. 1^a settimana 1^o anno (S è un' inversa destra)
(senza un po' di scelta)

Risposta ② Siano V e W sp. vett., e sia $f: V \rightarrow W$ lineare

Allora sono equiv:

(i) esiste solver qualitativo lineare

(ii) f surgettiva

Dim. Geometria 1 + C.A.

Sia $\{w_i\}_{i \in I}$ base algebrica di W . Per ogni $i \in I$ scegliamo $v_i \in V$ t.c. $f(v_i) = w_i$. Poniamo

$$S(w_i) := v_i \quad \forall i \in I,$$

estendiamo per linearità e verificiamo che funziona!
— o — o —

Prop. (Caratterizzazione solver quantitativi)

(non serve cont.)

Siano V e W sp. normati, e sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Allora sono equivalenti:

(i) esiste solver quantitativo (non nec. lineare)

(ii) f è aperta (cioè $f(\text{aperto di } V) = \text{aperto di } W)$

(iii) esiste $R > 0$ t.c. $f(B_V(0, R)) \supseteq B_W(0, 1)$.

Dim. (i) $\Rightarrow$ (iii) Facile con $R = M$ (costante del solver)

Dato $w \in W$ con $\|w\|_W < 1$, sappiamo che

$\|S(w)\|_V \leq M \|w\|_W < M$ e verifica $f(S(w)) = w$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Dato $w \in W$ poniamo $S(w) = 0$ se $w = 0$.
Altrimenti consideriamo

$$z := \frac{w}{2\|w\|_W} \in B_W(0,1)$$

Allora esiste $x \in B_V(0,R)$ t.c. $f(x) = z$. Poniamo

$$S(w) := 2\|w\|_W \cdot x$$

Facciamo le due verifiche

$$f(S(w)) = 2\|w\|_W f(x) = 2\|w\|_W \cdot z = w \quad \text{☺}$$

$$\|S(w)\|_V = 2\|w\|_W \cdot \|x\|_V \leq \underbrace{2R}_M \|w\|_W \quad \text{☺}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $f(B_V(0,1))$ è aperto, quindi contiene $B_W(0,r_0)$

Per linearità $f(B_V(0, \underbrace{\frac{1}{R}}_R)) \supseteq B_W(0,1)$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Dobbiamo dim. che $f(B_V(v_0, r_0))$ è aperto in W , quindi contiene una palla centrata in $f(v_0)$. Basta traslare il problema nell'origine e usare la linearità:

$$f(B_V(v_0, r_0)) = f(v_0 + r_0 B_V(0,1))$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{\uparrow} = f(v_0) + r_0 f(B_V(0,1))$$

$$\downarrow = f(v_0) + \frac{r_0}{R} f(B_V(0,R))$$

$$\stackrel{\uparrow \text{ (iii)}}{\supseteq} f(v_0) + \frac{r_0}{R} B_W(0,1) = B_W(f(v_0), \frac{r_0}{R})$$

— 0 — 0 —

Teorema della mappa aperta (Risposta ③)

Siano V e W spazi di Banach

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare e continua

Allora sono equivalenti

- (i) f è surgettiva (cioè esiste solver qualitativo)
- (ii) f è aperta (cioè esiste solver quantitativo)

Prop. (Solver quantitativo su un denso = fa il lavoro sporco)

Sia V sp. di Banach (solo in portenta)

Sia W sp. normato.

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare e continua.

Allora sono equivalenti:

- (i) esiste solver quantitativo (cioè f è aperta)
- (ii) " " " su un denso, cioè esiste $D \subseteq W$ denso, ed esiste $\hat{S}: D \rightarrow V$ tale che

$$f(\hat{S}(w)) = w \quad \forall w \in D$$

$$\exists \hat{M} \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \|\hat{S}(w)\|_V \leq \hat{M} \|w\|_W \quad \forall w \in D$$

- (iii) esiste $R > 0$ t.c. $\text{Clos}(f(B_V(0, R))) \supseteq B_W(0, 1)$

$$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$$

↑↑↑

Dim (Teo. mappa aperta, dato lavoro sporco) (ii) $\Rightarrow$ (i) ovvio

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ipotesi: f surgettiva Tesi: una qualunque delle 3 equiv. della prop. prec.

$$C_k := \text{Clos}(f(B_V(0, k)))$$

Sono chiusi e la loro unione è W se f è surgettiva
(questo anche senza chiusure)

Essendo W Banach, almeno uno ha parte interna, cioè

$$\exists B_W(v_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$$

$$\text{Claim: } B_W(0,1) \subseteq C_{\frac{2k_0}{r_0}} = \text{Clos}(\varphi(B_V(0, \frac{2k_0}{r_0})))$$

Sia $w \in B_W(0,1)$. Allora

$$w = \frac{1}{r_0} r_0 w = \frac{1}{r_0} \underbrace{(r_0 w + v_0)}_{\in C_{k_0}} - \frac{1}{r_0} \underbrace{v_0}_{\in C_{k_0}} \\ \in C_{\frac{2k_0}{r_0}}$$

Ho usato 2 fatti generali:

- se $a \in \text{Clos}(\varphi(B_V(0, k_0))) \Rightarrow \lambda a \in \text{Clos}(\varphi(B_V(0, \lambda k_0)))$
- se $a \in \text{Clos}(\varphi(A))$ e $b \in \text{Clos}(\varphi(B))$
 $\Rightarrow a+b \in \text{Clos}(\varphi(A+B)).$

Per la prop. prec. questo basta.

Corollario 1 Siano V e W sp. di Banach, e sia $\varphi: V \rightarrow W$ lineare, continua e invertibile.
Allora φ^{-1} è continua.

Dim. Essere φ aperta è equiv. alla continuità dell'inversa, posto che esista.

(Continuità dell'inversa)

Corollario 2 (Equivaleza di norme.)

Sia V sp. vettoriale. Siano $v \rightarrow \|v\|_1$ e $v \rightarrow \|v\|_2$ due norme che rendono V un Banach.

Supponiamo che esista $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|v\|_2 \leq M \|v\|_1 \quad \forall v \in V.$$

Allora esiste $R \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|v\|_1 \leq R \|v\|_2 \quad \forall v \in V$$

(quindi le 2 norme sono equiv.)

Dcm. $\text{Id}: V \rightarrow V$ è lineare, continua dalla norma 1 alla norma 2 e invertibile.

Quindi l'inversa è continua (dalla norma 2 a quella 1), quindi lip, ...

Corollario 3 (Teorema del grafico chiuso)

Siano V e W sp. di Banach, e sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Allora sono equiv:

(i) f è continua

(ii) il grafico di f è chiuso nel prodotto.

Dcm. (i) $\Rightarrow$ (ii) è ovvio (nemmeno serve lineare)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Consideriamo 2 norme in V

$$\|v\|_1 := \|v\|_V, \quad \|v\|_2 := \|v\|_V + \|f(v)\|_W$$

Facile verifica: entrambe sono norme e $\|v\|_1 \leq \|v\|_2$.

Se dimostriamo che V è Banach rispetto alla seconda, allora abbiamo finito, perché esiste R b.c.

$$\|v\|_2 \leq R \|v\|_1 \quad \forall v \in V$$

e questo è la lip. di f .

Sia $\{v_n\}$ di Cauchy rispetto alla norma 2. Allora

$$\{v_n\} \text{ è di C. in } V \Rightarrow v_n \rightarrow v_\infty \text{ in } V$$

$$\{f(v_n)\} \text{ è di C. in } W \Rightarrow f(v_n) \rightarrow w_\infty \text{ in } W$$

Essendo per ipotesi il grafico chiuso per forza $w_\infty = f(v_\infty)$ e quindi

$$v_n \rightarrow v_\infty \quad \text{nel senso della norma 2}$$

quindi V è completo risp. alla norma 2.

— o — o —

Achtung! Per funzioni non lineari
grafico chiusi $\not\Rightarrow$ continua
(pensare alla differenza)