

Dimostrazione di BS, versione equivalente (ii) $\Rightarrow$ (i) è ovvio

(i) $\Rightarrow$ (ii) Per ipotesi $\sup_{i \in I} \|L_i v\|_W < +\infty \quad \forall v \in V$

Poniamo

$$C_k := \{v \in V : \|L_i v\|_W \leq k \quad \forall i \in I\}$$

$$= \bigcap_{i \in I} \underbrace{\{v \in V : \|L_i v\|_W \leq k\}}_{\text{chiusi in } V \text{ per continuit  di } L_i \text{ e di } \|\cdot\|_W}$$

Per ipotesi V   l'union  dei C_k . Ma allora almeno uno ha int $\neq \emptyset$, cio  esiste

$$\overline{B}_V(v_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$$

$$\text{Claim: } \overline{B}_V(0, 1) \subseteq C_{\frac{2k_0}{r_0}}$$

Infatti sia $v \in \overline{B}_V(0, 1)$. Allora

$$v = \frac{1}{r_0} r_0 v = \frac{1}{r_0} (r_0 v + v_0) - \frac{1}{r_0} v_0$$

da cui

$$\|L_i v\|_W \leq \frac{1}{r_0} \underbrace{\|L_i (r_0 v + v_0)\|_W}_{\leq k_0} + \frac{1}{r_0} \underbrace{\|L_i v_0\|_W}_{\leq k_0}$$

perch  $v_0 + r_0 v$ e v_0 stanno in $\overline{B}_V(v_0, r_0)$.

Dal claim segue la conclusione perché

$$\|L_i v\|_W \leq \frac{2k_0}{n_0} \quad \forall v \in V \text{ con } \|v\|_V \leq 1$$

e ora basta fare il sup per controllare la norma come operatore.

— o — o —

Dim. BS, versione alternativa Supponiamo che non valga la (2)
La (2) dice che l'insieme in cui

$$\sup_{i \in I} \|L_i v\| < +\infty$$

è magro. Allora l'insieme non è magro e quindi non può essere l'unione dei C_k se questi hanno parte interna $\emptyset$.
Quindi esiste C_{k_0} con $\text{Int} \neq \emptyset$ ed è la dim. di prima.

— o — o —

BAIRE POINT Non convergenza puntuale di serie di Fourier.

Versione light Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e 2π -periodica
la cui serie di Fourier non converge puntualmente
in $x=0$.

Versione strong Sia V lo sp. delle funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
continue e 2π -periodiche. Questo è Banach
rispetto alla norma del sup.

Allora esiste $\mathcal{H} \subseteq V$ che è un G_δ denso tale che per ogni
 $f \in \mathcal{H}$ la serie di Fourier di f non converge puntualmente
in un G_δ denso di punti (dipendente dalla funzione).

Dau liget L'idea è di considerare le somme parziali

$$S_m^f(x) = \sum_{k=0}^m a_k \cos(kx) + \sum_{k=0}^m b_k \sin(kx)$$

e vederle come operatori lineari dopo averle calcolate per $x=0$

$$S_m: V \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{è la somma degli } a_k)$$

Se la serie di F di f converge puntualmente in $x=0$, allora $S_m^f(0)$ è una successione limitata.

Se convergesse sempre puntualm., avremmo limit. qualitativa, dunque per BS una limitazione quantitativa.

Questo vorrebbe dire che gli S_m sono limitati come operatori (in norma operatoriale).

$$S_m^f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_m(t-x) dt$$

dove D_m è il NUCLEO DI DIRICHLET

$$D_m(t) := \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} \quad (\text{vedi lezioni anno scorso})$$

e quindi

$$S_m^f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_m(t) dt$$

Devo trovare la norma di questo operatore

$$|S_m^f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^\infty} \cdot \|D_m\|_{L^1}$$

$$\text{Claim: } \|S_m(0)\|_{\mathcal{L}(V, \mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \|D_m\|_{L^1}$$

Fatto generale $L: L^\infty((a,b)) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$L(f) := \int_a^b f(t) g(t) dt$$

allora $\|L\|_{(L^\infty)'} = \|g\|_{L^1}$

In questo caso usiamo $f = \text{sign}(g)$. Lo stesso vale se ci riduciamo alle f continue perché basta appross. $\text{sign}(g(x))$ con funzioni continue e osservare che

$$\int_a^b f_n(t) g(t) dt \rightarrow \int_a^b \text{sign}(g(x)) \cdot g(x) dx$$

per conv. puntuale dominata.

Per concludere basta dimostrare che $\|D_n\|_{L^1} \rightarrow +\infty$ e questo è esercizio di analisi 1:

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{|\sin \frac{t}{2}|} dt \geq \underset{|\sin \frac{t}{2}| \leq \frac{|t|}{2}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t} dt$$

Poniamo $y = (n+\frac{1}{2})t$ da cui $dy = (n+\frac{1}{2}) dt$

$$= 2 \int_0^{2\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{|\sin y|}{y} \cancel{(n+\frac{1}{2})} \frac{1}{\cancel{(n+\frac{1}{2})}} dy$$

$$\rightarrow 2 \int_0^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y} dy = +\infty$$

— o — o —

Dim Strong

Abbiamo dim. in realtà che esiste un G_δ denso di funzioni per cui la serie NON converge in $x=0$.

Allo stesso modo trovo un G_δ denso per cui la serie di F non converge in un razionale q a scelta.

Se li interseco tutti ottengo un G_δ denso in cui la serie di F non converge in ogni $q \in \mathbb{Q}$.

Può convergere negli altri p.ti? NO! Poniamo

$$S^f(x) := \sup \{ |S_m^f(x)| : m \in \mathbb{N} \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Sappiamo che $S^f(x) = +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$ se f sta nel G_δ denso di funzioni.

Ora $S^f(x)$, come funzione di x , è sup di funzioni continue quindi è SCL.

Fatto generale: l'insieme dei p.ti $x \in \mathbb{R}$ in cui una funzione SCL vale $+\infty$ è un G_δ in $\mathbb{R}$.

$$\{x \in \mathbb{R} : S^f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : S^f(x) > n\}$$

e questi sono tutti aperti !!!

Quindi, fissata f nel G_δ di funzioni, la sua serie di F non converge in un G_δ denso di x !!!

— o — o —

Idea per una dim. con le mani di BS

Supponiamo $\|L\|$ non limitato in norma. Allora esiste $\{i_m\} \subseteq I$ t.c.

$$\|L_{i_m}\|_{\infty(v,w)} \geq 20^m$$

Inoltre esiste $\{v_m\} \subseteq V$ tali che

$$\|v_m\|_V = 1 \quad \text{e} \quad \|L_{i_m}(v_m)\|_W \geq \frac{1}{2} \|L_{i_m}\|_{\infty(v,w)}$$

(quasi allineati)

Per ogni $\{\sigma_m\} \subseteq \{-1, +1\}$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{10^k} v_k$$

converge (converge assolutamente).

Claim: scegliendo bene i σ_m , la somma della serie è un vettore v tale che

$$\|L(v)\|_W \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^m} \|L_{i_m}\|_{\infty(v,w)}$$

↓
divergono almeno come 20^m

[Per maggiori dettagli BLOG DI TERENCE TAO alla voce BAIRE]

— o — o —