

BAIRE POINT Non esistono sp. di Banach V con base algebraica numerabile

Dim. Supponiamo per assurdo che $\{v_n\}$ sia base algebrica. Poniamo

$$C_k := \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

È ovvio che la loro unione è tutto V . Se fossero chiusi (e lo sono) almeno uno dovrebbe avere $\text{Int} \neq \emptyset$ il che è impossibile, perché se C_k avesse interno $\neq \emptyset$ dovrebbe contenere un intorno dell'origine (è un s.sp. vett.) e quindi dovrebbe contenere εv_{k+1} per ε piccolo.

Lemma Sia V uno sp. normato, e sia W un s.sp. vett. di dim. finita. Allora W è chiuso.

Dim 1 Siano $\{v_n\} \subseteq W$ con $v_n \rightarrow v_\infty$. Vogliamo che $v_\infty \in W$. Prendiamo una base $\{w_1, \dots, w_k\}$ di W .

Su W possiamo mettere 2 norme:

- quella ereditata da V
- quella che deriva dall'identificazione con $\mathbb{R}^k$

$$\|\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k\| := \{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2\}^{1/2}$$

Lemma (vedi Analisi 2): in dim. finita tutte le norme sono equivalenti. Per hp $\{v_n\}$ è di Cauchy rispetto alla prima norma (perché converge), quindi è di Cauchy rispetto alla seconda norma, ma risp. alla 2ª norma W è completo, quindi v_n converge ad un el. di W risp. alla 2ª norma, quindi anche rispetto alla 1ª. !!!

Dim 2 Scriviamo

$$v_m = \alpha_m^1 w_1 + \dots + \alpha_m^k w_k$$

Vorremmo tanto che i coeff. passassero al limite, per lo meno come sottosucc.

Questo è gratis se i coeff. sono limitati. Supponiamo per assurdo che non lo siano. A meno di s.succ. (non vno = unate) possiamo assumere che α_m^1 sia sempre il più grande in valore assoluto e che wlog $\alpha_m^1 \rightarrow +\infty$. Ora

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_m^1} v_m} = w_1 + \boxed{\frac{\alpha_m^2}{\alpha_m^1}} w_2 + \dots + \boxed{\frac{\alpha_m^k}{\alpha_m^1}} w_k$$

$\downarrow$ (v_m limitati e $\alpha_m^1 \rightarrow +\infty$)
 $\downarrow$
 0

$\swarrow$
sono tutti limitati, quindi a meno di s.succ. hanno limite

Ma allora al limite abbiamo

$$0 = w_1 + l_2 w_2 + \dots + l_k w_k$$

e questo va contro l'essere una base.
— 0 — 0 —

Oss. Non esiste nessuna norma che renda $\mathbb{R}[x]$, cioè lo sp. dei polinomi, un Banach.

Dim. : ha base algebrica numerabile

Ora $\left\{ \int_4^{27} |p(x)|^{32} dx \right\}^{1/32}$ è una norma su $\mathbb{R}[x]$

Domanda : chi è il suo completamento ?
— 0 — 0 —

BAIRE POINT (Analisi 1)

Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile in nessun punto.

Azi: ne esistono tantissime!

Dom. Poniamo $V =$ insieme delle funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue e limitate

Analisi 2: V è completo rispetto alla norma del sup.

Claim: gli elementi di V che sono derivabili in un p.to a loro scelta sono un magro.

Prendiamo il discorso quantitativo

$$C_k := \left\{ f \in V : \exists x \in [-k, k], \forall h \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right], \right. \\ \left. |f(x+h) - f(x)| \leq k|h| \right\}$$

Brutalmente: stiamo chiedendo rapp. increment. $\leq k$ per tutti gli h abbastanza vicini a 0.

Se $f \in V$ è derivabile in almeno un p.to x_0 , allora $f \in C_k$ per un qualche k . Infatti

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

e quindi per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \leq 2|f'(x_0)| \quad \forall h \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$$

Ma allora $f \in C_k$ per di prendere

$$k \geq |x_0|, \quad k \geq 2|f'(x_0)|, \quad \frac{1}{k} \leq \delta.$$

Secondo punto: i C_k sono chiusi.

Supponiamo $f_n \rightarrow f_\infty$ uniformemente, e $f_n \in C_k$ per un certo k fisso. Siano x_n i corrispondenti punti nella def. di C_k . Allora a meno di s.succ. $x_n \rightarrow x_\infty$ (perché $x_n \in [-k, k]$). Per ogni n accade che

$$|f_n(x_n + h) - f_n(x_n)| \leq k |h| \quad \forall h \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$$

$\downarrow$ (doppio scambio
conv. unif.)

$$|f_\infty(x_\infty + h) - f_\infty(x_\infty)| \leq k |h| \quad "$$

Quindi $f_\infty \in C_k$.

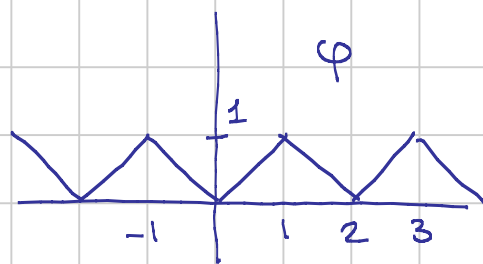
Terzo p.to: ogni C_k ha parte interna $\emptyset$.

Supponiamo $B_\nu(f_0, \varepsilon_0) \subseteq C_{k_0}$.

A meno di cambiare ε_0 con $\frac{\varepsilon_0}{2}$, posso supporre wlog che f_0 sia molto regolare, ad esempio Lipschitz con costante L . (Basta fare convoluzioni di f_0).

Consideriamo la funzione φ come in figura

Poniamo



$$f_n(x) := f_0 + \frac{1}{n} \varphi(n^2 x)$$

Valgono 2 fatti: $f_n \rightarrow f_0$ unif.

$\frac{1}{n} \varphi(n^2 x)$ è Lip. con costante esattamente n in ogni sottointervallo

Quindi $f_n \in B(f_0, \varepsilon_0)$ definitivamente, quindi dovrebbe stare in C_{k_0} , ma allora dovrebbe essere che verifica

$$|f_n(x+h) - f_n(x)| \leq k_0 \quad \forall |h| \leq \frac{1}{k_0}$$

per un dato x , ma questo è impossibile per colpa di $\frac{1}{n} \varphi(n^2 x)$.

$$\frac{1}{n} \varphi(n^2 x) = f_n(x) - f_0(x)$$

$$\left| \frac{1}{n} \varphi(n^2(x+R)) - \frac{1}{n} \varphi(n^2 x) \right| \leq |f_n(x+R) - f_n(x)| + |f_0(x+R) - f_0(x)|$$

$$\leq k_0 |R| + L |R| \\ = (k_0 + L) |R|$$

Mentre a $5x$ può essere grande a piacere.
— 0 — 0 —

BAIRE POINT (Analisi 3)

Teorema di BANACH-STEINHAUS

Versione equivalente. Sia V sp. di Banach, sia W sp. normato, sia I insieme di indici.

Per ogni $i \in I$ sia $L_i : V \rightarrow W$ lineare e continua

Allora sono fatti equivalenti

(1) Limitazione qualitativa

$$\forall v \in V \quad \sup_{i \in I} \|L_i v\|_W < +\infty$$

(2) Limitazione quantitativa

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall v \in V \quad \|L_i v\|_W \leq M \|v\|_V$$

o equivalentemente

$$\sup_{i \in I} \|L_i\|_{\infty(V,W)} < +\infty$$

— 0 — 0 —

BS (con versione alternativa) Siano $L_i : V \rightarrow W$ come sopra.

Allora vale una ed una sola delle seguenti alternative

(1) Limitazione quantitativa come sopra

(2) Esiste un G_δ denso $A \subseteq V$ tale che

$$\forall v \in A \quad \sup_{i \in \mathbb{I}} \|L_i v\|_W = +\infty$$

Corollario Siano $L_n : V \rightarrow W$ una succ. di operatori lineari e continui.

Supponiamo che

$$L_n(v) \rightarrow L_\infty(v) \quad \forall v \in V$$

(convergenza puntuale)

Allora vale la limitazione quantitativa, dunque gli L_n sono equi-lip., dunque L_∞ è lineare e continuo.

— o — o —