

BAIRE POINT 2 (Analisi 1)

Non esistono funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sono discontinue "solo" sugli irrazionali (mentre ne esistono che sono discontinue solo su $\mathbb{Q}$: ad esempio $\frac{1}{\text{denom.}}$ e o fuori di $\mathbb{Q}$)

Def. Un sottoinsieme di uno sp. top. si dice

- F_σ se è unione numerabile di chiusi
- G_δ se è intersezione numerabile di aperti

Prop. Siano X e Y due spazi metrici, e sia $f: X \rightarrow Y$.

Allora l'insieme dei p.ti di discontinuità di f è un F_σ .

Dim. Moralmente: ritorno ad un p.to di discontinuità f "oscilla" che è un discorso qualitativo.

Rendiamo quantitativa l'oscillazione. Poniamo, per ogni $\varepsilon > 0$,

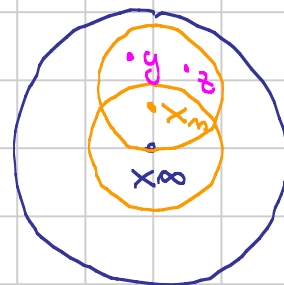
$$D_\varepsilon := \{x \in X : \forall r > 0 \exists (y, z) \in B_X(x, r)^2 \text{ dist}_Y(f(y), f(z)) \geq \varepsilon\}$$

Facile verifica: x è p.to di discontinuità $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.c. $x \in D_\varepsilon$

Inoltre tutti i D_ε sono chiusi. Supponiamo $\{x_n\} \subseteq D_\varepsilon$ e che $x_n \rightarrow x_\infty$. Claim: $x_\infty \in D_\varepsilon$.

Dato $r > 0$ trovo $x_n \in B_X(x_\infty, \frac{r}{2})$

Inoltre trovo y e z in $B_X(x_n, \frac{r}{2})$



con immagini a distanza $\geq \varepsilon$.

Questi stessi y e z stanno in $B_X(x_\infty, r)$.

Morale: essere p.to di discontinuità non passa al limite,
ma essere p.to di disc. ε -esima sì!!

Basta ora osservare che l'insieme di tutti i p.ti di discontinuità è

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_{1/m}$$


Sol. esercizio Analisi 1 Sia D l'insieme dei p.ti di discontinuità. Sappiamo che è un F_σ .

Vogliamo dim. che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ NON è un F_σ .

Se lo fosse, avremmo

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_m$$

$\uparrow$ chiusi in $\mathbb{R}$

ma allora i C_m avrebbero parte interna $\emptyset$, ma allora

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_m \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

e quindi $\mathbb{R}$ sarebbe unione num. di chiusi con $\text{Int} = \emptyset$



BAIRE POINT 3 (Analisi 2)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ separatamente continua

$$\left(\begin{array}{l} \forall y \in \mathbb{R} \quad x \rightarrow f(x, y) \text{ è continua} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad y \rightarrow f(x, y) \text{ è continua} \end{array} \right)$$

e nulla su un denso $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Allora $f \equiv 0$.

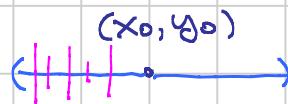
(Banale nel caso $D = \mathbb{Q}^2$, ma con dim. che non si ricicla)

Dim Supponiamo per assurdo sia falso. Allora esiste

$$f(x_0, y_0) = 4\delta > 0$$

$\uparrow$ wlog

Allora esiste $\eta_0 > 0$ t.c.



$$f(x, y_0) \geq 2\delta \quad \forall x \in [x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0]$$

Per ogni $x \in [x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0]$ esiste $\rho(x) > 0$ t.c.

$$f(x, y) \geq \delta \quad \forall y \in [y_0 - \rho(x), y_0 + \rho(x)]$$

Se il $\rho(x)$ avesse un minimo sindacale da qualche parte avremmo trovato un rettangolo in cui $f(x, y) \geq \delta$.
Rivoliamo il discorso quantitativo

$$C_k := \{x \in [x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0] : \rho(x) \geq \frac{1}{k}\}$$

È evidente che l'unione dei C_k è $[x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0]$. Se fossero chiusi per Baire almeno un C_{k_0} avrebbe parte interna, quindi contenebbe un intervallo.

Fissato k , sia $\{x_n\} \subseteq C_k$ con $x_n \rightarrow x_\infty$. Claim: $x_\infty \in C_k$

$$f(x_n, y) \geq \delta \quad \forall y \in [y_0 - \frac{1}{k}, y_0 + \frac{1}{k}]$$

$\downarrow$ ← continuità a y fisso

$$f(x_\infty, y) \geq \delta \quad \forall y \in [y_0 - \frac{1}{k}, y_0 + \frac{1}{k}]$$

— o — o —

Oss. Si poteva ottenere un ρ min. sindacale dimostrando che $x \rightarrow \rho(x)$ è sc.i.

Purtroppo in generale è solo semi-continua sup.

— o — o —

BAIRE POINT 4 (Analisi 3)

Teorema Sia H sp. di Hilbert, e sia $\{v_m\}$ una succ. debolmente convergente.
Allora $\{v_m\}$ è limitata.

Dim. Per ogni $v \in H$ si ha che

$$\langle v_m, v \rangle \rightarrow \langle v_\infty, v \rangle$$

e quindi in particolare $\{\langle v_m, v \rangle\}$ è limitata.

Facciamolo quantitativo. Per ogni $k \geq 0$ reale poniamo

$$C_k := \{v \in H : |\langle v_m, v \rangle| \leq k \quad \forall m \in \mathbb{N}\}$$

L'unione dei C_k è tutto H per ipotesi. Inoltre sono chiusi perché
 $\uparrow$ qui basta k intero

$$C_k = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{v \in H : |\langle v_m, v \rangle| \leq k\}$$

chiusi per cont. del prodotto scalare

Quindi almeno uno ha parte interna, cioè esiste

$$B(v_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$$

Claim: $B(0, 1) \subseteq C_{\frac{2k_0}{r_0}}$. Infatti sia $w \in B(0, 1)$. Allora

$$w = \frac{1}{r_0} r_0 w = \frac{1}{r_0} \underbrace{(r_0 w + v_0)}_{\subseteq C_{k_0}} - \frac{1}{r_0} \underbrace{v_0}_{\subseteq C_{k_0}} \subseteq C_{\frac{2k_0}{r_0}}$$

Basta fare il prodotto scalare $\langle w, v_m \rangle$

Finale: ora sappiamo che

$$|\langle u_m, w \rangle| \leq \frac{2k_0}{n_0} \quad \forall w \in B(0,1)$$

Usando $w := \frac{u_m}{\|u_m\|}$ otteniamo $\|u_m\| \leq \frac{2k_0}{n_0}$

(se $\|u_m\| = 0$ è ancora più facile).
— o — o —

Teorema Stessa cosa in un Banach (conv. deb. $\Rightarrow$ limitatezza)

Dim. Per ogni $f \in V'$ abbiamo che $\{f(u_m)\} \subseteq \mathbb{R}$ è limitata (converge a $f(u_\infty)$).

Potiamo

$$C_k := \{f \in V' : |f(u_m)| \leq k \quad \forall m \in \mathbb{N}\}$$

$$= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{f \in V' : |f(u_m)| \leq k\}$$

chiusi in V'

L'unione dei C_k è tutto V' , dunque esiste

$$B_{V'}(f_0, n_0) \subseteq C_{k_0}$$

Claim: $B_{V'}(0,1) \subseteq C_{\frac{2k_0}{n_0}}$

Se dimostriamo il claim avremo che

$$|f(u_m)| \leq \frac{2k_0}{n_0} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall f \in B_{V'}(0,1)$$

e si chiude per caratt. duale della norma.

Oss. Abbiamo usato Baire solo in V' , che è Banach in automatico, quindi V Banach non serve.

Verifica del claim: se $f \in B_{V'}(0,1)$, allora

$$f(v_m) = \frac{1}{r_0} r_0 f(v_m) = \frac{1}{r_0} (r_0 f(v_m) + f_0(v_m)) - \frac{1}{r_0} f_0(v_m)$$

e con i valori assoluti

$$\begin{aligned} |f(v_m)| &\leq \frac{1}{r_0} |r_0 f(v_m) + f_0(v_m)| + \frac{1}{r_0} |f_0(v_m)| \\ &= \frac{1}{r_0} \underbrace{|(r_0 f + f_0)(v_m)|}_{\leq k_0} + \frac{1}{r_0} \underbrace{|f_0(v_m)|}_{k_0} \end{aligned}$$

perché f_0 e $f_0 + r_0 f$ stanno in $B_{V'}(f_0, r_0)$.

Esercizio: provare a farlo con le mani in un Hilbert separabile!!!