

SPAZI DI BAIRE

Prop. Sia X sp. topologico.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

(1) Per ogni succ. $\{A_n\}$ di aperti vale l'implicazione

$$A_n \text{ denso } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ denso (in particolare } \neq \emptyset)$$

(2) Per ogni succ. $\{C_n\}$ di chiusi vale l'implicazione

$$\text{Int}(C_n) = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{Int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \emptyset \quad (\text{in particolare } \neq X)$$

(3) Per ogni succ. $\{C_n\}$ di chiusi vale l'implicazione

$$\text{Int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) \neq \emptyset \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \text{Int}(C_n) \neq \emptyset$$

Dim (1) $\Leftrightarrow$ (2) Passare al complementare

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Contrappositive ($A \Rightarrow B$ è equiv. a $\text{not } B \Rightarrow \text{not } A$)

Def. (Spazi di Baire) Uno sp. top. X si dice **spazio di BAIRE** se vale uno dei 3 equiv. statements della Prop (quindi tutti).

Def. Un sottoinsieme A di uno sp. top. si dice

- NOWHERE DENSE se $\text{Int}(\text{Clos}(A)) = \emptyset$
- MAGRO se è unione numerabile di nowhere dense

"Prima categoria

- RESIDUALE se il complementare è magro
- di SECONDA CATEGORIA se non è di prima categoria.

Oss. Unione numerabile di MAGRI è magra.

Oss. In uno spazio di Baire i magri hanno parte interna vuota

Idea brutale: $\rightarrow$ nowhere dense = piccolissimo topologicamente
 $\rightarrow$ magro = piccolo topologicamente

Utilizzo pratico: voglio dire che esiste $x \in X$ con una certa proprietà e per farlo dimostro che l'insieme degli x che non hanno la proprietà è magro. Se X è Baire è fatta.

Per dire che un insieme è magro lo scompoio in nowhere dense.

Tutti gli spazi che rientrano in queste tipologie sono sp. di Baire:

- ① spazi metrici completi
- ② spazi loc. compatti Hausdorff
- ③ aperti in sp. di Baire (rispetto alla top. ristretta).

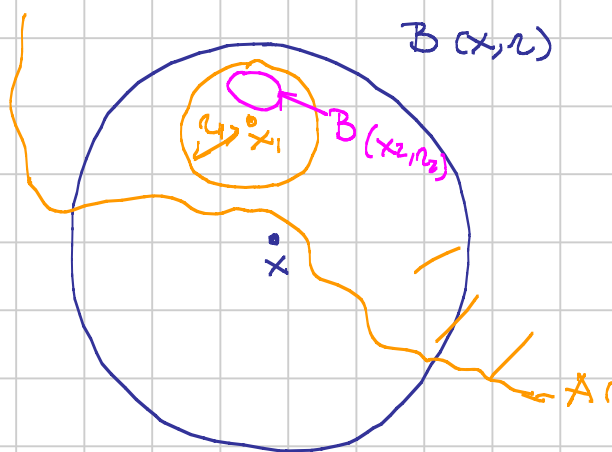
Teorema Se X è metrico completo, allora è spazio di Baire.

Dim. Siano A_n aperti densi. Dimostriamo che $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è denso.

Dato $x \in X$, serve che ogni $B(x, r)$ interseca l'intersezione.

L'idea è costruire induttivamente due succ. $\{x_n\} \subseteq X$
e $\{r_n\} \subseteq (0, +\infty)$ t.c.
 $r_n \rightarrow 0$

$$\bar{B}(x_1, r_1) \subseteq B(x, r) \cap A_1$$



$$\overline{B}(x_{m+1}, r_{m+1}) \subseteq B(x_m, r_m) \cap A_{m+1}$$

La costruzione si può fare induttivamente:

• Passo base: esiste $\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq B(x, r) \cap A_1$ per densità di A_1

• Supponendo di essere arrivati al passo n , possiamo trovare

$$\overline{B}(x_{m+1}, r_{m+1}) \subseteq B(x_m, r_m) \cap A_{m+1} \text{ per densità di } A_{m+1}$$

e wlog possiamo assumere $r_{m+1} \leq \frac{1}{m+1}$ (così $r_m \rightarrow 0$).

Claim: $\{x_m\}$ è di Cauchy, quindi $x_m \rightarrow x_\infty$ e $x_\infty \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Fissato m , abbiamo che $x_m \in \overline{B}(x_m, r_m)$ per ogni $m \geq m$ e poiché i raggi tendono a 0 questo ci dice $\{x_m\}$ è di Cauchy. Inoltre per ogni $m \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$x_\infty \in \overline{B}(x_m, r_m) \subseteq A_m \quad \forall m$$

da cui la tesi.

— o — o —

Oss. La dim. nel caso di spazi loc. compatti è sostanzialmente analoga, nel senso che si definisce iterativamente una successione U_n con la proprietà che

$$\text{Clos}(U_{m+1}) \subseteq U_m \cap A_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

↑ compatta

L'elemento x cercato sta nell'intersezione degli U_n che è $\neq \emptyset$ [Sistemare i dettagli e vedere se e dove si usa Hausdorff].

Teorema

Sia X sp. top. di Baire, e sia $Y \subseteq X$ un aperto.
Allora Y è sp. di Baire.

Dim.

(Si basa sulla top. ristretta, quindi *achtung a pusciolare*)

Mostriamo che inter. di aperti densi rimane densa.

Siano $\{A_n\}$ aperti densi in Y . Poniamo

$$\hat{A}_n := A_n \cup (X - \text{clos}(Y))$$

Si osserva che $\{\hat{A}_n\}$ sono aperti densi in X (verificare per bene)
quindi la loro intersezione è densa in X .

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{A}_n = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cup (X \setminus \text{clos}(Y))$$

Affinché questa sia densa in X occorre che la prima intersezione sia densa in Y (dato $y \in Y$, c'è un suo intorno tutto contenuto in Y , e questo non può toccare la seconda parte).

Esercizio

- Provare a dim. che chiuso in Baire è Baire
- Riuscirci
- Trovare il controesempio, visto che è **falso**
- Capire cosa è successo ☺

Esempi

- $\mathbb{R}$ è spazio di Baire
- $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ sono sp. di Baire (metrici completi)
- Palla aperta in metrico completo è Baire
- " chiusa in " " " (è a sua volta metrico completo)
- $\mathbb{Q}$ non è sp. di Baire (con la top. che arriva da $\mathbb{R}$)
(è unione numerabile di p.ti, cioè chiusi con parte interna vuota)

BAIRE POINT 1 (Analisi 1)

Sea $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che per ogni $x > 0$ si abbia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx) = l \quad (\text{sempre lo stesso})$$

Allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$

Idea: QUALITATIVO VS QUANTITATIVO

Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0$ si ha $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ definitivamente.

Ipotesi: $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x > 0 \quad |f(nx) - l| \leq \varepsilon$ definitivamente.
 $\uparrow$ qualitativo

Provediamo la cosa quantitativa. Definiamo

$$C_k := \{x > 0 : |f(nx) - l| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq k\}$$

L'unione dei C_k è tutto $(0, +\infty)$. Inoltre i C_k sono chiusi in $(0, +\infty)$ perché

$$C_k = \bigcap_{n \geq k} \underbrace{\{x > 0 : |f(nx) - l| \leq \varepsilon\}}_{\text{facilmente chiusi}}$$

Essendo $(0, +\infty)$ sp. di Baire, esiste $(a, b) \subseteq C_{k_0}$. Ma allora

$$|f(nx) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (a, b) \quad \forall n \geq k_0$$

cioè

$$|f(y) - l| \leq \varepsilon \quad \forall y \in \bigcup_{n \geq k_0} (na, nb)$$

$\uparrow$ ricoprono tutta una semiretta

Iniziamo a ricoprire
quando
 $(n+1)a < nb$

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c} \\ na \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \\ \uparrow \\ nb \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \\ \uparrow \\ (n+1)b \end{array} \right) \\ & (n+1)a & \end{array}$$

$a < n(b-a)$ e questa accade definitivamente.
— o — o —

Variante interessante : e se l può dipendere da x ?
— o — o —