

Come dimostro che il duale di $L^p(\mathbb{R})$ è $L^{p'}(\mathbb{R})$ (con $p < +\infty$) e più in generale per aperti di $\mathbb{R}^d$ con misura non finita

Dim., nel caso di $\mathbb{R}$ (poi è uguale)

• Data $L : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua, per restrizione otteniamo $L_k : L^p((-k, k)) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua

• Per ogni $k \in \mathbb{N}$ possiamo rappresentare, ottenendo che

$$L_k(f) = \int_{-k}^k g_k(x) f(x) dx \quad \forall f \in L^p((-k, k))$$

• Se $k_2 > k_1$, allora $g_{k_2}(x) = g_{k_1}(x)$ per ogni $x \in [-k_1, k_1]$

[Qualche forma di FLCV]

• Definiamo $g_\infty : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ "incollando" le g_k e dimostriamo

che $g_\infty \in L^{p'}(\mathbb{R})$ (segue da equi-bound su $\|g_k\|_{L^{p'}}$)

e che g_∞ rappresenta su tutto $\mathbb{R}$ (le troncature di f fuori da $(-k, k)$ convergono ad f in $L^p(\mathbb{R})$).

— o — o —

Finalmente abbiamo ottenuto la comp. debole delle palle in $L^p(\Omega)$ con $p > 1$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto.

Nel caso $p = +\infty$ abbiamo la comp. debole $\neq$ vedendo L^∞ come duale di L^1 .

Dim. "con le mani" nel caso $p=4$

Data $\{f_n\} \subseteq L^4(\Omega)$ limitata, vogliamo trovare n_k e $f_\infty \in L^4(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f_{n_k}(x) g(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f_\infty(x) g(x) dx \quad \forall g \in L^{4/3}(\Omega).$$

Step 1 Accontentiamoci di un denso $D \subseteq L^{4/3}(\Omega)$ numerabile, nel senso che

$$\int_{\Omega} f_{n_k}(x) g(x) dx \rightarrow \text{qualcosa} \quad \forall g \in D \\ =: L(g)$$

Step 2 Mostriamo che n_k va bene sempre, cioè

$$\int_{\Omega} f_{n_k}(x) g(x) dx \rightarrow \text{qualcosa} \quad \forall g \in L^{4/3}(\Omega) \\ =: L(g)$$

dove ora $L: L^{4/3}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Step 3 Verifichiamo che L è lineare e continuo, quindi grazie al teorema di rappresentazione sappiamo che

$$L(g) = \int_{\Omega} g(x) f_\infty(x) dx$$

per una opportuna $f_\infty \in L^4(\Omega)$.

Oss. Per $p=1$ non c'è nemmeno il denso numerabile in $L^\infty(\Omega)$.

[Aggiunto dopo video: poi, beninteso, ci sarebbe il problema insormontabile di rappresentare con una $f_\infty \in L^1$ il limite $L: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ ottenuto.]

ESERCIZIO ALLA LAX-MILGRAM

Data $f \in L^2((a,b))$ vogliamo risolvere $u'' = f$ e $u(a) = u(b) = 0$.
Più in generale, data $f \in L^2(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto
vogliamo risolvere

$$\Delta u = f \quad \text{o più in gen.} \quad \operatorname{div}(A(x) Du) = f$$

con A matrice unif. ellittica e u nulla al bordo

1° approccio: variazionale Consideriamo il funzionale

$$F(u) := \int_a^b \left[\frac{1}{2} u'^2 + f u \right] dx$$

$$F(u) := \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + f(x) u(x) \right\} dx$$

Mostriamo con il metodo diretto che esiste un'unica in H_0^1 e
ricavando ELE vediamo che è sol. debole dell'eq. richiesta

2° approccio: alla LAX-MILGRAM

Una soluzione debole
dell'eq. è una funzione

$u \in H_0^1((a,b))$ tale

$$-\int_a^b u''(x) \varphi(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in H_0^1((a,b))$$

Consideriamo in $H_0^1((a,b))$ il prodotto scalare

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle := \int_a^b u'(x) v'(x) dx$$

È un prod. scalare davvero?

- Bilineare è quasi ovvio
- Non negativo pure

- $\langle\langle \mu, \mu \rangle\rangle = 0 \Rightarrow \mu \equiv 0$?

[Si, perché viene $u(x) \equiv 0 \Rightarrow u(x) \equiv \text{costante}$
 $\Rightarrow u(x) \equiv 0$ per le DBC].

Inoltre $H^1_0(a,b)$ è un Hilbert rispetto a questo prodotto.

[Ricord: $\{f_n\}$ sarebbe di Cauchy in $L^2((a,b))$ e grazie alle DBC si ha un limite]

Ora il funzionale $L: H_0^1(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$L(\varphi) := - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(a,b)$$

è lineare e continuo rispetto alla norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Infatti

$$|L(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \cdot \|\varphi\|_{L^2(a,b)}$$

$$\leq \text{const} \cdot \|f\|_{L^2(a,b)} \cdot \{\ll \varphi, \varphi \gg\}^{1/2}$$

" $\|\varphi\|_{L^2}$

Quindi serve qualcosa del tipo

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq \|\tilde{\varphi}\|_{L^2} \cdot \text{cost}$$

e questa è la disug. di Poincaré.

Quindi L si rappresenta mediante il prod. scalare strano, cioè esiste $u \in H^1_0(a,b)$ t.c.

$$L(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(a,b)$$

e questo è quello che volevamo.

Teorema anettrato (SCI forte + convessa $\Rightarrow$ SCI debole)

Sia V sp. normato e sia $f: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è convessa

(ii) f è SCI forte ($u_n \rightarrow u_\infty \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u_\infty)$)

Allora f è SCI debole.

Dim. Versione veloce: i sottolivelli di f sono convessi e chiusi forte, dunque chiusi deboli.

Versione lenta concreta: consideriamo la succ. $\{u_{n_k}\}$ b.c.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(u_{n_k}) = l$$

Se $l = +\infty$ siamo contenti.

Se $l \in \mathbb{R}$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo

$$S(l+\varepsilon) := \{u \in V : f(u) \leq l+\varepsilon\}.$$

Ora $S(l+\varepsilon)$ è convesso e chiuso forte e inoltre $u_{n_k} \in S(l+\varepsilon)$ definitivamente. Ma poiché $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ per il teorema sugli insiemi sappiamo che

$$u_\infty \in S(l+\varepsilon) \quad \text{cioè} \quad f(u_\infty) \leq l+\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario segue che $f(u_\infty) \leq l$.

Se $l = -\infty$ si fa allo stesso modo con

$$S(M) := \{u \in V : f(u) \leq M\}.$$

Weierstrass generalizzato stile analisi 2

Sia V normato, sia $f: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è SCI forte

(ii) si ha che

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} f(v) = +\infty$$

(iii) f convessa

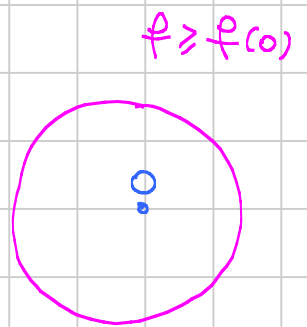
(iv) V riflessivo e V separabile

Allora esiste

$$\min \{ f(v) : v \in V \}.$$

Dim. Esiste $R > 0$ t.c.

$$\|v\|_V \geq R \Rightarrow f(v) \geq f(0)$$



Se esiste min su $\overline{B}_V(0, R)$, allora quello è min. globale.
Ora f è SCI debole per tes. precedente e le palle sono debolmente compatte.

— o — o —

Achtung! Le ipotesi servono !!!

$$F(u) = \int_0^1 (u^2 + |u^2 - 1|) dx \quad u \in H_0^1 = V$$

Ora $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ è continuo forte e soddisfa il limite all'infinito.

L'inf di F è 0 e lo posso raggiungere come in figura.

D'altra parte il minimo non esiste.

— o — o —

