

BIDUALE E SPAZI RIFLESSIVI

Def. (Iniezione canonica) Sia V uno sp. normato e sia $(V')'$ il suo biduale, cioè il duale (top.) del duale (top.).

L'iniezione canonica è la mappa

$$J : V \rightarrow (V')'$$

definita da

$$[Ju](f) := f(u) \quad \forall u \in V, \forall f \in V'$$

Propr. L'iniezione canonica è un'isometria lineare, dunque in particolare iniettiva.

Dim Linearità: semplice verifica.

Fissato $v \in V$, vogliamo dim. che $\|Ju\|_{(V')'} = \|u\|_V$.

$$\leq \text{Segue da } |[Ju](f)| = |f(u)| \leq \|u\|_V \cdot \|f\|_{V'}$$

Facendo il sup al RHS su tutte le $f \in V'$ con $\|f\|_{V'} \leq 1$ segue la tesi.

$$\geq \text{Dato } u, \text{ vogliamo trovare } f \in V' \text{ t.c. } |[Ju](f)| = \|u\|_V \text{ e } \|f\|_{V'} \leq 1.$$

Ma questo è il funzionale allineato.

Def. Uno spazio normato V si dice RIFLESSIVO se la J è surgettiva.

Oss. In questo caso V è isometrico al suo bi-duale, dunque in particolare V è un duale, quindi è per forza Banach.

Achtung! Esistono esempi perversi di spazi V che sono isometrici linearmente con $(V')'$, ma non sono riflessivi.

Morale: per essere riflessivi proprio la J deve essere l'identificazione.

Teorema (Compattanza debole delle palle)

Sia V sp. normato e sia $\{u_n\} \subseteq V$ una succ.

Supponiamo che

(i) V riflessivo,

(ii) V' separabile (prezzo da pagare per usare le succ.)

(iii) $\{u_n\}$ limitata.

Allora esiste $\{n_k\}$ crescente, ed esiste $u_\infty \in V$ t.c.

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty.$$

Dim **Step 1** "Accontentare un deuso"

Sia $D \subseteq V'$ un deuso numerabile. Per ogni $f \in D$ si ha che

$$|f(u_n)| \leq \|f\|_{V'} \cdot \|u_n\|_V$$

$\uparrow$ ipotesi (iii)

e quindi è limitato in n . Con il solito proc. diagonale otteniamo $\{n_k\}$ t.c.

$$f(u_{n_k}) \rightarrow \text{qualcosa} \quad \forall f \in D$$
$$=: L(f)$$

Abbiamo definito $L: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Step 2 "Chi accontenta il deuso accontenta tutti"

Si tratta di dim. che

$$f(u_{n_k}) \rightarrow \text{qualcosa} =: L(f) \quad \forall f \in V'$$

$\uparrow$ la stessa di prima

In questo modo abbiamo definito $L: V' \rightarrow \mathbb{R}$

[Basta dim. che $\{f(u_{n_k})\}$ è di Cauchy]

Step 3 "Uso della rappresentazione"

Si verifica facilmente che

- L è lineare
 - L è continua
- } limite puntuale di mappe lineari e equi-lip.

Ma allora $L \in (V')'$. Per riflessività esiste $u_\infty \in V$ t.c.

$$L(f) = f(u_\infty) \quad \forall f \in V'$$

Questo completa la dim.

— o — o —

[Aggiunto dopo video: con duale separabile]

Prop. Sia V sp. normato RIFLESSIVO e sia $f \in V'$.

Allora

$$\|f\|_{V'} = \max \{ |f(u)| : u \in V, \|u\|_V \leq 1 \}$$

$\uparrow$ e non solo il sup

Dim. In generale è il sup. Sia $\{u_m\}$ una succ. suppizzante, cioè

$$\|u_m\|_V \leq 1 \quad \text{e} \quad |f(u_m)| \rightarrow \|f\|_{V'}.$$

Essendo limitata, esiste $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ con $\|u_\infty\|_V \leq 1$ (per sci. debole della norma).

A questo p.to

$$|f(u_m)| \rightarrow |f(u_\infty)| \quad \text{quindi sup realizzato.}$$

— o — o —

Oss. Il realizzatore del max possiamo pensarlo come "vettore allineato al funzionale".

Esempio In ℓ^1 consideriamo $f: \ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \arctan(i)$$

È chiaro che $\|f\|_{(\ell^1)'} = \frac{\pi}{2} = \|\{\arctan i\}\|_{\ell^\infty}$

Tuttavia non esiste $x \in \ell^1$ che realizza $\frac{\pi}{2}$, perchè la disuguaglianza

$$|f(x)| < \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

è sempre stretta.

Altro esempio $V = \{u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue f.c. } u(0)=0\}$
è una Banach rispetto alla norma del sup
(verifica per esercizio)

Il funzionale

$$f(u) := \int_0^1 u(x) dx$$

sta in V' e ha $\|f\|_{V'} \leq 1$.

Tuttavia non esiste $u \in V$ con $\|u\|_V \leq 1$ e $f(u) = 1$.
— 0 — 0 —

Oss. Nel caso di applicazioni lineari tra 2 spazi, con arrivo $\neq \mathbb{R}$, può accadere che la costante non sia realizzata anche se è tutto Hilbert.

Esempio $H = L^2((0,1))$ $L: H \rightarrow H$

$$(Lu)(x) = x u(x)$$

• Facile: $\|Lu\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$

• L'uguaglianza non si può realizzare perché

$$x^2 u(x)^2 < u(x)^2$$

è sempre stretta.

Esercizio: come si approx. il sup.

Esempio H separabile con base $\{e_n\}$. Poniamo $L: H \rightarrow H$ definita da

$$L(e_n) := \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_n$$

Anche in questo caso $\|L\|_{\mathcal{L}(H,H)} = 1$, ma non viene realizzata.

— o — o —

Ci sono legami fra separabilità di V e V' ?

V separabile $\Rightarrow V'$ separabile?

In generale no (pensare a $\ell^1 - \ell^\infty$), ma sì se V è riflessivo.

Teorema In generale vale

V' separabile $\Rightarrow V$ separabile

Dim. Step 1 La sfera unitaria di V' è separabile
(sottoinsieme di metrico sep. è sep.)

Sia $\{f_n\} \subseteq V'$ con $\|f_n\|_{V'} = 1$ un denso numerabile nella sfera.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $u_n \in V$ tale che $\|u_n\|_V \leq 1$

$$f_n(u_n) \geq \frac{1}{2} \quad (\text{specie di vettore allineato, posso arrivare vicino a } \pm 1 \text{ a piacere})$$

Sia W lo span dei $\{u_n\}$. Se dim. che W è denso abbiamo finito (il denso numerabile in V diventano le comb. lin. dei $\{u_n\}$ a coeff. in $\mathbb{Q}$).

Step 2 Dim. che W è denso.

Se così non fosse, esisterebbe $v \in V \setminus \text{clos}(W)$.

Posso anche supporre $\|v\|_V = 1$ se serve.

Ma allora esisterebbe $f \in V'$ t.c. $\|f\|_{V'} = 1$ e

$$f(v) = 1 \quad \text{e} \quad f(u_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(lo costruisco con HB definendolo come sopra in $W \oplus \mathbb{R}v$)

Questo f sta nella sfera unitaria di V' , quindi esiste f_n t.c.

$$\|f - f_n\|_{V'} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \leq 1$$

$$\text{ed in particolare} \quad |f(u_n) - f_n(u_n)| \leq \|f - f_n\|_{V'} \cdot \|u_n\|_V \leq \frac{1}{4}$$

Ma allora

$$0 = |f(u_n)| = |f_n(u_n) + f(u_n) - f_n(u_n)|$$

$$\geq |f_n(u_n)| - |f(u_n) - f_n(u_n)| \geq \frac{1}{4} \quad \text{e questo è un guaio.}$$

$\geq \frac{1}{2} \quad \text{---} \quad \geq -\frac{1}{4}$