

Step 3 : surgettività Data $L : L^p \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua, occorre trovare $g \in L^{p'}$ t.c. $L = Jg$.

3.1 Definizione della misura. Come prima possiamo

$$\nu(A) := L(1_A) \quad \forall A \in \mathcal{M}$$

e verifichiamo che è misura assol. cont. rispetto a μ .
È lo stesso conto di prima usando

$$\| \bigcup_{i=1}^m A_i \| \rightarrow \| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \| \quad \text{in } L^p(X)$$

3.2 Definizione di g . RN produce $g \in L^1$ (ma noi vorremo $L^{p'}$)
t.c.

$$L(1_A) = \nu(A) = \int_A g(x) d\mu = [Jg](1_A) \quad \forall A \in \mathcal{M}$$

3.3 Jg ed L coincidono in L^∞ $\leftarrow$

Per ora sappiamo solo che $g \in L^1$, quindi Jg è ben definito, lineare e continuo SOLO in L^∞ .

Ora L e Jg coincidono sulle caratteristiche di elem. di $\mathcal{M}$, quindi coincidono su L^∞ perché lo span delle caratt. è denso in L^∞ . (È vero che è denso pure in L^p , ma per ora non sappiamo che Jg è continuo in L^p).
rispetto alla norma di L^∞

3.4 Dimostriamo che $g \in L^{p'}$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la troncata

$$g_n(x) := \begin{cases} g(x) & \text{se } -n \leq g(x) \leq n \\ n & \text{se } g(x) \geq n \\ -n & \text{se } g(x) \leq -n \end{cases}$$

e possiamo

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= |g_n(x)|^{p'-1} \operatorname{sign}(g_n(x)) \\ &= |g_n(x)|^{p'-1} \operatorname{sign}(g(x)) \end{aligned}$$

Allora

$$\int_{\mathbb{X}} |g_n(x)|^{p'} d\mu = \int_{\mathbb{X}} |g_n(x)|^{p'-1} \operatorname{sign}(g_n(x)) \cdot g_n(x) d\mu$$

Ho sostituito
 $|g_n(x)| \leq |g(x)|$

$$\leq \int_{\mathbb{X}} \underbrace{|g_n(x)|^{p'-1} \operatorname{sign}(g(x))}_{f_n(x)} \cdot g(x) d\mu$$

$$= [Jg](f_n) = L(f_n) \quad \text{perché } f_n \in L^\infty \text{ e quindi lo sappiamo !!!}$$

$$\leq \|L\|_{(L^p)'} \cdot \|f_n\|_{L^p}$$

$$= \|L\|_{(L^p)'} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{X}} |f_n(x)|^p d\mu \right\}^{1/p}$$

stesso conto dello
 step 2

$$= \|L\|_{(L^p)'} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{X}} |g_n(x)|^{p'} d\mu \right\}^{1/p}$$

Semplificando otteniamo

$$\|g_n\|_{L^{p'}} \leq \|L\|_{(L^p)'} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Essendo n arbitrario abbiamo da lei $(|g_n| \rightarrow |g|$ crescendo, quindi qui si usa Beppo-Levi).

3.5 Conclusione Ora Jg è continuo in L^p , rispetto alla norma di L^p , e coincide con L sulle caratt. dei misurabili (e pure in L^∞). Quindi coincidono in L^p .

— o — o —

Cosa resta vero nel caso di L^∞

Il duality pairing induce una mappa $J: L^1 \rightarrow (L^\infty)'$ che è

- ben definita
- lineare
- isometria
- iniettiva ma NON surgettiva

Step 1 Solito Hölder

Step 2 $\|Jg\|_{(L^\infty)'} = \|g\|_{L^1}$

⊆ Segue come sempre da Hölder

⊇ Data g , occorre scegliere $f(x) = \text{sign}(g(x))$ e osservare che

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^1} &= \int_X g(x) f(x) d\mu \leq \|Jg\|_{(L^\infty)'} \|f\|_{L^\infty} \\ &\leq \|Jg\|_{(L^\infty)'} \end{aligned}$$

Step 3 Dove ci si pianta nella surgettività?

Dopo aver definito v , otteniamo facilmente che v è FINITAMENTE additiva, ma non nec. num. additiva (se misure fin. add. e assol. cont. si caratterizzano molto male).

— o — o —

DUALE DEGLI HILBERT

Sia H spazio di Hilbert

Versione breve: $H' = H$

Versione lunga: il duality pairing

$$[Jv](w) := \langle v, w \rangle \quad \forall (v, w) \in H^2$$

definisce una mappa $J: H \rightarrow H'$ che è

- ben definita

- lineare

- isometria

- surgettiva (bigettiva)

} facile esercizio

Resta da dim. la surgettività, cioè per ogni $L: H \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua, esiste $v \in H$ t.c.

$$L(x) = \langle v, x \rangle \quad \forall x \in H$$

Dim 1: via base ortonormale

(serve H separabile, oppure accettare basi + che numerabili prodotte da CA)

Sia $\{e_i\}$ la base e consideriamo il vettore v che ha compon.

$$v_i := L(e_i)$$

Se un tale v esiste, allora $L(x)$ e $\langle v, x \rangle$ coincidono sulla base, che spanna un denso, quindi coincidono in H .

Serve che $\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 < +\infty$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=1}^m v_i^2 = \sum_{i=1}^m v_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^m v_i L(e_i)$$

linearità $\nearrow$ $= L\left(\sum_{i=1}^m v_i e_i\right)$

$$\leq \|L\|_{H'} \cdot \left\| \sum_{i=1}^m v_i e_i \right\|_H$$
$$= \|L\|_{H'} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^m v_i^2 \right\}^{1/2}$$

Semplificando, abbiamo stima unif. in n .

Dim 2: via proiezione sul convesso Consideriamo

$$K := \ker(L)$$

È un s.sp. vett. (quindi convesso) e chiuso (L è continua).

Se $K = H$, allora basta prendere $v = 0$.

Se $K \neq H$, allora esiste un vettore $v_0 \in H$ t.c.

$$\|v_0\| = 1 \quad \text{e} \quad v_0 \in K^\perp$$

Per averlo, basta prendere $w_0 \notin K$, poi considerare $w_0 - P_K w_0$ che è ortogonale a K (teo. precedente) e normalizzarlo.

Claim: vale la rappresentazione con $v := L(v_0)v_0$

Dobbiamo dimostrare che

$$L(x) = \langle L(v_0)v_0, x \rangle \quad \forall x \in H$$

Questo è vero per ogni $x \in K$ ed è vero per $x = v_0$,
quindi ci basta dimostrare che ogni $x \in H$ si scrive come

$$x = \alpha v_0 + w \quad \text{con } w \in K$$

Basta scegliere $\alpha = \frac{L(x)}{L(v_0)}$ in modo che $w = x - \frac{L(x)}{L(v_0)} v_0$

e quindi $L(w) = L(x) - \frac{L(x)}{L(v_0)} L(v_0) = 0 \Rightarrow w \in \ker.$

— o — o —

IL PARADOSSO

Osserviamo che $H^1((-1,1)) \subseteq L^2((-1,1))$ ed è più denso

Moralmente: H^1 è + piccolo di L^2

Consideriamo $L: L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua.

Per restrizione, questa definisce

$$\hat{L}: H^1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{lineare e continua}$$

(è continua perché per ipotesi $|L(u)| \leq \text{cost} \cdot \|u\|_{L^2}$,
quindi a maggior ragione $|L(u)| \leq \text{cost} (\|u\|_{H^1})$)

L'applicazione $(L^2)' \ni L \rightarrow \hat{L} \in (H^1)'$

è lineare e INIETTIVA (se $\hat{L} = 0$, allora anche $L = 0$
perché H^1 è denso)

Moralmente: $(H^1)'$ è più grande di $(L^2)'$

Ma essendo Hilbert dovrebbe essere $L^2 = (L^2)'$ e $H^1 = (H^1)'$

— o — o —