

DUALI DI SPAZI L^p

Setting: $(X, \mathcal{M}, \mu)$ dove X è un insieme, $\mathcal{M}$ è una σ -algebra di sottoinsiemi di X , $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura (num. additiva sui disgiunti)

Caso base: $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$ cioè $\mu(X) < +\infty$

Casi più generali: μ è σ -finita (X è unione numerabile di sottoinsiemi di misura finita), oppure μ qualunque.

Spazi $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ per $p \in [1, +\infty]$ estremi inclusi.

Sono spazi normati completi.

Teorema misterioso (RADON-NIKODYM) (versione finita)

Sia X insieme, $\mathcal{M}$ σ -algebra di sottoinsiemi

Sia $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$ misura (quindi $\mu(X) < +\infty$)

Sia $\nu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ misura con segno (può assumere anche valori negativi, e num. additiva sui disgiunti)

Supponiamo ν assolutamente continua rispetto a μ , cioè

$$\forall A \in \mathcal{M} \quad \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

Allora esiste $g \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ t.c.

$$\nu(A) = \int_A g(x) d\mu$$

— o — o —

Def. (Duality pairing tra funzioni) Date due funzioni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ poniamo

$$[Jg](f) := \int_X f(x) g(x) d\mu$$

Oss. L'integrale che definisce J ha senso sotto opportune ipotesi su f e g , ad esempio se

$$f \in L^p(X, m, \mu) \quad \text{e} \quad g \in L^q(X, m, \mu)$$

$$\text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (\text{interpretata se } p=1 \text{ oppure } p=+\infty)$$

Questo segue da Hölder.

— o — o —

DUALE DI $L^1(X, m, \mu)$

Versione brutale: il duale di L^1 è L^∞

Versione precisa: il duality pairing induce una mappa

$$J: L^\infty(X, m, \mu) \rightarrow [L^1(X, m, \mu)]'$$

che è

- ben definita
- lineare
- isometria
- bigettiva

Dim. Step 1: buona definizione

Per ogni $g \in L^\infty$, la funzione $f \mapsto \int_{\mathbb{X}} fg \, d\mu$ è un elemento di $(L^1)'$. Diremo che $Jg \in (L^1)'$

- È facile che l'integrale ha senso
- " " " è lineare come funzione di f
- La continuità rispetto alla norma L^1 segue dalla stima

$$\left| \int_{\mathbb{X}} fg \, d\mu \right| \leq \|g\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{L^1}$$

Step 2: isometria

Dobbiamo dimostrare

$$\|Jg\|_{(L^1)'} = \|g\|_{L^\infty}$$

La disug. $\leq$ segue dalla fine del passo precedente.

Per quella opposta, dobbiamo, data g , scegliere bene f .

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per definizione di norma ∞ esiste $A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ con $\text{meas}(A_\varepsilon) > 0$ t.c.

$$|g(x)| \geq \|g\|_{L^\infty} - \varepsilon \quad \forall x \in A_\varepsilon$$

Usiamo

$$f(x) = \begin{cases} \text{sign}(g(x)) & \text{se } x \in A_\varepsilon \\ 0 & \text{se } x \notin A_\varepsilon \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} (\|g\|_{L^\infty} - \varepsilon) \text{meas}(A_\varepsilon) &\leq \int_{A_\varepsilon} |g(x)| \, d\mu = \int_{\mathbb{X}} g(x) f(x) \, d\mu \\ &\leq \|Jg\|_{(L^1)'} \cdot \|f\|_{L^1} \leq \|Jg\|_{(L^1)'} \cdot \text{meas}(A_\varepsilon) \end{aligned}$$

Semplificando $\mu_n(A_\varepsilon)$ (che è > 0) e sfruttando che ε è arbitrario, abbiamo altra disug.

Step 3: surgettività Data $L: L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua, dobbiamo trovare $g \in L^\infty$ t.c. $L = \int g$.

3.1 Costruzione della misura ν Per ogni $A \in \mathcal{M}$, poniamo

$$\nu(A) := L(1_A)$$

$\uparrow$ funzione caratt. di A che sta in L^1

Claim: ν è misura assol. cont. rispetto a μ

- $\nu(\emptyset) = 0$: facile verifica
- $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$: facile verifica $1_A \equiv 0$ in L^1 .
- ν è numerabilmente additiva. Prendiamo $\{A_i\} \subseteq \mathcal{M}$ a due a due disgiunti.

L'osservazione chiave è che

$$\| \bigcup_{i=1}^n A_i \rightarrow \| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$\uparrow$
in $L^1(X)$

(convergenza puntuale q.o.
dominata dalla costante 1 che
sta in $L^1(X)$)

(questo vale pure in L^p se $p < +\infty$)

A questo

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = L\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right)$$

$\uparrow$
fatto sopra
+ L continua L^1

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n L(\mathbb{1}_{A_i})$$

$\uparrow$
Ai disgiunti

$$\stackrel{\text{def } \nu}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).$$

3.2 Costruzione della g

$RN \Rightarrow$ esiste $g \in L^1$ t.c. $\nu(A) = \int_A g(x) d\mu$ per ogni $A \in \mathcal{M}$.

Dobbiamo però dimostrare che $g \in L^\infty$. Per farlo dimostriamo che

$$|g(x)| \leq \|L\|_{(L^1)'} \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{X}.$$

Supponiamo infatti che non sia vero. Allora esiste $\varepsilon > 0$ t.c.

$$|g(x)| \geq \|L\|_{(L^1)'} + \varepsilon$$

su un insieme A_ε di misura positiva. wlog supponiamo pure che

$$g(x) \geq \|L\|_{(L^1)'} + \varepsilon \quad \forall x \in A_\varepsilon$$

(l'altro caso è analogo).

Allora

$$\begin{aligned} (\|L\|_{(L^1)'} + \varepsilon) \operatorname{meas}(A_\varepsilon) &\leq \int_{\mathbb{X}} g(x) \mathbb{1}_{A_\varepsilon}(x) d\mu \\ &= \nu(A_\varepsilon) \\ &= L(\mathbb{1}_{A_\varepsilon}) \\ &\leq \|L\|_{(L^1)'} \cdot \|\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\|_{L^1} \\ &= \|L\|_{(L^1)'} \cdot \operatorname{meas}(A_\varepsilon) \end{aligned}$$

Semplificando la misura si ottiene un assurdo.

3.3 Conclusioni. Dimostriamo che $L = Jg$.

Noi sappiamo che

$$\begin{aligned} L(1_A) &= \nu(A) = \int_{\mathbb{X}} g(x) 1_A(x) d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M} \\ &= Jg(1_A) \end{aligned}$$

cioè L e Jg coincidono sulle caratteristiche di misurabili.

Concludiamo osservando che spaziano un denso in L^1

(osserviamo che questo vale sempre se $\mu(\mathbb{X}) < +\infty$).

DUALE DI L^p con $p \in (1, +\infty)$

Versione breve: $(L^p)' = L^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Versione lunga: il duality pairing ... $J: L^{p'} \rightarrow (L^p)'$ t.c....

Step 1: buona definizione Segue da Hölder via disug.

$$\left| \int_{\mathbb{X}} fg d\mu \right| \leq \|g\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}$$

Step 2: isometria Sene $\|Jg\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^{p'}}$

⊆ Segue da sopra

⊇ Dobbiamo, data g , scegliere f . Poniamo

$$f(x) := |g(x)|^{p'-1} \operatorname{sign}(g(x))$$

e osserviamo che $f \in L^p$ e vale

$$\int_{\mathbb{X}} |f(x)|^p d\mu = \int_{\mathbb{X}} |g(x)|^{p'} d\mu \quad (\text{stesso conto che con le successioni})$$

Allora

$$\int_{\mathbb{X}} |g(x)|^{p'} d\mu = \int_{\mathbb{X}} g(x) f(x) d\mu$$

$$= [Jg](f)$$

$$\leq \|Jg\|_{(L^p)'} \cdot \|f\|_{L^p}$$

$$= \|Jg\|_{(L^p)'} \left\{ \int_{\mathbb{X}} |f(x)|^p d\mu \right\}^{1/p}$$

$$= \|Jg\|_{(L^p)'} \left\{ \int_{\mathbb{X}} |g(x)|^{p'} d\mu \right\}^{1/p'}$$

Semplificando abbiamo disug. voluta.

—o —o —

to be continued...