

VIAGGIO INTORNO AL DUALE DI ℓ^∞

Brutale: ℓ^1 non è il duale di ℓ^∞

Tuttavia J definisce una $J: \ell^1 \rightarrow (\ell^\infty)'$ che è

- ben definita
- lineare
- isometria (e quindi continua)
- iniettiva ma (purtroppo?) NON surgettiva.

Step 1: buona positura Dati $y \in \ell^1$ e $x \in \ell^\infty$ vale

$$\sum_{i=0}^n |x_i y_i| \leq \max \{ |x_i| : i=0, 1, \dots, n \} \sum_{i=0}^n |y_i|$$

$$\leq \|x\|_{\ell^\infty} \|y\|_{\ell^1}$$

Step 2: isometria Da sopra

$$\|Jy\|_{(\ell^\infty)'} \leq \|y\|_{\ell^1}$$

Per la disug. opposta definiamo $x \in \ell^\infty$ ponendo

$$x_i := \operatorname{sign}(y_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

e osserviamo che $\|x\|_{\ell^\infty} = 1$ se $y \neq 0$. Inoltre

$$\|y\|_{\ell^1} = \sum_{i=0}^{\infty} y_i x_i \leq \|Jy\|_{(\ell^\infty)'} \|x\|_{\ell^\infty} \leq \|Jy\|_{(\ell^\infty)'}$$

Oss profonda: il caso di ℓ^1 è stato ℓ^1 unico in cui abbiamo dovuto usare gli ε in questa fase.

Step 3 Data $L: \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ posso porre $y_i := L(e_i)$
e verificare che $y \in \ell^1$. Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} |y_i| &= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\text{sign}(y_i)}_{z_i} y_i = \sum_{i=0}^{\infty} z_i L(e_i) \\ &= L\left(\sum_{i=0}^{\infty} z_i e_i\right) \leq \|L\|_{(\ell^\infty)'} \cdot \left\| \sum_{i=0}^{\infty} z_i e_i \right\|_{\ell^\infty} \\ &\leq \|L\|_{(\ell^\infty)'} \end{aligned}$$

A questo punto L e Jy coincidono su $\text{Span}(\{e_i\})$ che però non è denso in ℓ^∞ .

Tuttavia abbiamo dimostrato che $J: \ell^1 \rightarrow (C_0)'$ è

- ben definita
- lineare
- isometria
- bigettiva (ora funziona che $\text{Span}(\{e_i\})$ è denso)

DUALE DI C_{00} È ℓ^1 con la stessa J di sopra!

Dim. C_{00} è denso in C_0 (che quindi ne è il completamento: vedi analisi 2).

Ogni $L: C_{00} \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continuo è pure lip, quindi unif. cont., quindi (Analisi 2) si estende in modo unico a C_0 .

Gli elementi di $(C_{00})'$ sono le restrizioni di elementi di $(C_0)'$.

Achtung! Non varrà sulle funzioni che il duale di $C^0(X)$
o $C_c(X)$ è ℓ^1 !!!!!

Ultra-brutal: il duale di C è ℓ^1 .

Semi-brutal: il duale di C è $\ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}$ e questo è ℓ^1

Detto per bene: $\ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}$ come spazio vettoriale è $\ell^1 \oplus \mathbb{R}$, cioè

$$\{(x, x_\infty) : x \in \ell^1, x_\infty \in \mathbb{R}\}$$

con norma

$$\|(x, x_\infty)\|_{\ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}} := \|x\|_{\ell^1} + |x_\infty|$$

Definiamo $J: \ell^1 \oplus_1 \mathbb{R} \rightarrow C'$ ponendo

$$[Jy](x) := \sum_{i=0}^{\infty} y_i x_i + y_\infty x_\infty$$

$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$

Si ha che J è

- ben definita
- lineare
- isometria
- bigettiva.

Inoltre $\ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}$ è isometrico e isomorfo come sp. vett. a ℓ^1

$$((x_0, x_1, \dots), x_\infty) \rightsquigarrow (x_\infty, x_0, x_1, \dots)$$

Dim Step 1: buona definizione

$$y = (\{y_i\}, y_\infty)$$

$$|[Jy](x)| \leq \|x\|_{\ell^\infty} \cdot \|\{y_i\}\| + \overset{\lim x_i}{|x_\infty|} \cdot |y_\infty|$$
$$\leq \|x\|_{\ell^\infty}$$

$$\leq \|x\|_{\ell^\infty} \cdot \|y\|_{\ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}}$$

$\|x\|_C$

Step 2: isometria Esattamente lo stesso conto di C_0 o ℓ^∞ .

[Dopo video: leggermente più delicato (sia per C sia per C_0) perché $x_i = \sup(y_i)$ potrebbe non essere finito]

Step 3: surgettività Data $L: C \rightarrow \mathbb{R}$ poniamo

$$y_i := L(e_i)$$

$$y_\infty := L(1, 1, 1, \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} L(e_i)$$

- Verifichiamo che $(\{y_i\}, y_\infty) \in \ell^1 \oplus \mathbb{R}$.

L'unica cosa da dim. è che $\sum_{i=0}^{\infty} |L(e_i)|$ converge e questo è lo stesso conto di C_0 o ℓ^∞ .

- Resta solo da verificare che Jy e L coincidono in C .
Noi sappiamo per costruzione che coincidono in e_i e in $e_\infty := (1, 1, 1, \dots)$ (fare bene la verifica per e_∞ e capire perché abbiamo sottratto la serie!).
Ma questi spannano un denso (basta togliere ad una succ. e_∞ moltiplicato il limite).

— o — o —

Esercizio Trovare un elemento di $(\ell^\infty)'$ che non si rappresenta come Jy per un qualche $y \in \ell^1$

Idea: l'applicazione $Lx := \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ è ben definita

e continua in C , anzi è 1-lip. HB la estende in modo 1-lip a tutto ℓ^∞

Perché questa non è rappresentabile da J ? Perché se almeno uno degli $y_i \neq 0$ basta cambiare il valore del corrispondente x_i e $[Jy](x)$ cambia, mentre il limite della successione non cambia. Altro modo: pensare a $L(e_i)$.

Chi è l'extender del limite !!!

Idea #1: il $\limsup$ (NON è molto lineare)

Idea #2: CESARO (vedi Analisi 1)

Forse funziona definendo $CC :=$ spazio delle succ. per cui un passo di Cesaro assicura il limite
(Esercizio: caratterizzare il duale CC')

Fatto vero: l'extender è drammaticamente uno unico!!!

Prendiamo $(2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, \dots) = s$

Claim: $L(s)$ può essere un qualunque numero compreso tra 2 e 3.

Tornando nella dir. di MB, c'erano 2 vincoli

$$L(s+v) \leq p(s+v) - L(v) \quad \forall v \in s.sp. \text{ dove tutto ok}$$

$$L(s-v) \geq L(v) - p(s-v)$$

Esaminiamo la 1^a:

$$L(s+v) \leq \|s+v\|_{\ell^\infty} = \lim v_i \quad \forall v \in C$$

Usando $v \equiv 0$ troviamo $L(s) \leq 3$

Analogamente $L(s) \geq 2$.

In questo modo definiamo $L: \text{Span}(c, s) \rightarrow \mathbb{R}$
ponendo

$$L(v) = \lim v_i$$

$$\text{se } v \in C$$

$$L(s) = 2,71$$

$$\text{se } s = (2, 3, 2, 3, \dots)$$

Questa è lineare e 1-lip., quindi HB me la estende a ℓ^∞ .

Esercizio Deciso cosa fa in $(2, 3, 2, 3, \dots)$, è
obbligato quello che fa in altre succ. ???

Ad esempio su $(3, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 3, 4, \dots)$

— o — o —