

SPAZI DI SUCCESSIONI

Spazi di successioni classici

- Dato $p \in [1, +\infty)$ si definisce ℓ^p l'insieme delle succ. $\{x_i\}$ t.c.

$$\|x\|_{\ell^p}^p := \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < +\infty \quad x_i \in \mathbb{R}$$

- Si definisce ℓ^∞ l'insieme delle succ. $\{x_i\} \subseteq \mathbb{R}$ t.c.

$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup \{ |x_i| : i \in \mathbb{N} \}$$

- Si considerano i seguenti 3 sottospazi di ℓ^∞ :

$$c := \{ \text{succ. } x_i \text{ che hanno limite per } i \rightarrow +\infty \}$$

$$c_0 := \{ \text{succ. } x_i \rightarrow 0 \text{ per } i \rightarrow +\infty \}$$

$$c_{00} := \{ \text{succ. } \{x_i\} : x_i = 0 \text{ definitivamente} \}$$

$$\text{Chiaramente } c_{00} \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty.$$

Fatti generali:

- sono tutti sp. normati e vettoriali
 - sono tutti completi tranne c_{00} (il cui completamento è c_0)
- [per ℓ^p si può usare il canone di vederlo come $L^p(\mathbb{N})$ risp. a misura che conta i p to o rifare dim. el. vista in ℓ^2 ;
per c e c_0 sono i teo. di scambio di Analisi 2 per i limiti rispetto alla conv. unif.]

DUALE DI SPAZI DI SUCCESSIONI

Date due qualunque succ. $\{x_i\} \subseteq \mathbb{R}$ e $\{y_i\} \subseteq \mathbb{R}$ poniamo

$$[Jy](x) := \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i \quad (\text{Duality pairing})$$

Senza ipotesi su x e y affinché la serie converga.

Indichiamo e_n la successione che ha tutti 0 e un 1 in posizione n .

Oss. $c_{00} = \text{Span}(\{e_n\})$.

Enunciato brutale: il duale di ℓ^1 è ℓ^∞

Enunciato decente

Il duality pairing J definisce una mappa

$$J : \ell^\infty \rightarrow (\ell^1)'$$

che è

- ben definita
- lineare
- continua e isometrica
- bigettiva

Dim. Buona definizione e linearità

Devo dimostrare che $\sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$ converge se $x \in \ell^1$ e $y \in \ell^\infty$

La linearità sarà una facile verifica.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=0}^n |x_i y_i| \leq \max \{ |y_i| : i=0, 1, \dots, n \} \sum_{i=0}^n |x_i| \\ \leq \|y\|_{\ell^\infty} \cdot \|x\|_{\ell^1}$$

Essendo n arbitrario la serie converge assolutamente.
Questo dice anche che

$$|[Jy](x)| \leq \|y\|_{\ell^\infty} \|x\|_{\ell^1}$$

da cui la continuità.

Step 2: verifica isometria Da sopra abbiamo

$$\|Jy\|_{(\ell^1)'} \leq \|y\|_{\ell^\infty}$$

Serve disug. opposta. Se $y=0$ non è difficile. Altrimenti per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|y_k| \geq \|y\|_{\ell^\infty} - \varepsilon$$

Definiamo $x \in \ell^1$ ponendo

$$x_i := \begin{cases} \operatorname{sign}(y_k) & \text{se } k=i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e osserviamo che $\|x\|_{\ell^1} = 1$. Ora

$$\|y\|_{\ell^\infty} - \varepsilon \leq |y_k| = [Jy](x) \leq \|Jy\|_{(\ell^1)'} \|x\|_{\ell^1} = \|Jy\|_{\ell^1}$$

e questa è la disug. opposta.

Step 3: bigettiva Iniettiva è ovvio dall'isometria.

Se ne surgettiva, cioè per ogni $L \in (\mathcal{Q}^1)'$ esiste $y \in \mathcal{Q}^\infty$ t.c.

$$L(x) = [Jy](x) \quad \forall x \in \mathcal{Q}^1 \quad (\star)$$

Poniamo $y_i := L(e_i)$.

• Verifichiamo $y \in \mathcal{Q}^\infty$. Infatti

$$|y_i| = |L(e_i)| \leq \|L\|_{(\mathcal{Q}^1)'} \cdot \|e_i\|_{\mathcal{Q}^1} \stackrel{1}{\leq} \|L\|_{(\mathcal{Q}^1)'}$$

• Verifichiamo $(\star)$. Poniamo $\hat{L}(x) := [Jy](x)$ e osserviamo che L e $\hat{L}$ coincidono sugli e_i , quindi sul loro Span, il quale è DENSO in $\mathcal{Q}^1$.

Brutale: il duale di $\mathcal{Q}^p$ è $\mathcal{Q}^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, cioè $(\mathcal{Q}^p)' = \mathcal{Q}^{p'}$

Detto bene: il duality pairing definisce $J: \mathcal{Q}^{p'} \rightarrow (\mathcal{Q}^p)'$ che è

- ben definita
- lineare
- isometria (dunque continua)
- bigettiva.

Step 1: buona definizione Per ogni n vale

$$\sum_{i=0}^n |x_i y_i| \stackrel{1}{\leq} \left\{ \sum_{i=0}^n |x_i|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{i=0}^n |y_i|^{p'} \right\}^{1/p'}$$

Hölder $\leq \|x\|_{\mathcal{Q}^p} \cdot \|y\|_{\mathcal{Q}^{p'}}$

Step 2 Isometria Da sopra

$$\|Jy\|_{(\ell^p)'} \leq \|y\|_{\ell^{p'}} \leftarrow [\text{Corretto dopo video}]$$

Per la disuguaglianza opposta devo "scegliere x in funzione di y ".

Poniamo

$$x_i := |y_i|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_i)$$

Verifichiamo che $x \in \ell^p$ e $\|x\|_{\ell^p} = \|y\|_{\ell^{p'}}^{p'/p}$. Infatti

$$\sum_{i=0}^n |x_i|^p = \sum_{i=0}^n |y_i|^{p'p-p} = \sum_{i=0}^n |y_i|^{p'} \\ \uparrow \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Leftrightarrow p+p' = pp'$$

Passando al limite in n si ha

$$\|x\|_{\ell^p}^p = \|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}.$$

Ora

$$\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'} = \sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^{p'} = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{|y_i|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_i)}_{x_i} y_i$$

$$= [Jy](x) \leq \|Jy\|_{(\ell^p)'} \cdot \|x\|_{\ell^p} \\ \leq \|Jy\|_{(\ell^p)'} \cdot \|y\|_{\ell^{p'}}^{p'/p}$$

Semplificando abbiamo disug. richiesta

Step 3

Specificità

Data $L: \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ voglio trovare y che lo rappresenta.

Poniamo

$$y_i := L(e_i)$$

• Verifichiamo che $y \in \ell^{p'}$. Stesso conto di sopra

$$\sum_{i=0}^n |y_i|^{p'} = \sum_{i=0}^n \underbrace{|y_i|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_i)}_{z_i} \cdot y_i$$

$$= \sum_{i=0}^n z_i L(e_i) \quad (\text{comb. lineare finita})$$

$$= L\left(\sum_{i=0}^n z_i e_i\right)$$

$$\leq \|L\|_{(\ell^p)'} \left\| \sum_{i=0}^n z_i e_i \right\|_{\ell^p}$$

$$= \|L\|_{(\ell^p)'} \left\{ \sum_{i=0}^n |z_i|^p \right\}^{1/p} \quad (\text{per il conto di prima})$$

$$= \|L\|_{(\ell^p)'} \left\{ \sum_{i=0}^n |y_i|^{p'} \right\}^{1/p}$$

Portando a sx e facendo il lim per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\|y\|_{\ell^{p'}} \leq \|L\|_{(\ell^p)'}$$

• Per avere che $L = \sum y_i$ basta osservare che coincidono in

$\operatorname{Span}(\{e_i\})$, il quale è denso in ℓ^p .

— 0 — 0 —

(Questo non sarà più vero in ℓ^∞)