

PSEUDO-NORMA ASSOCIATA AD UN CONVESSO

(In inglese GAUGE, in francese JAUGE)

Sia V sp. normato, e sia $C \subseteq V$ tale che

(i) C convesso non vuoto

(ii) C aperto

(iii) $0 \in C$.

Definiamo $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$p(v) := \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{v}{\alpha} \in C \right\} \quad \forall v \in V$$

Allora valgono i seguenti fatti.

(1) p è una pseudo-norma

(2) Esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$0 \leq p(v) \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

(3) vale la caratterizzazione

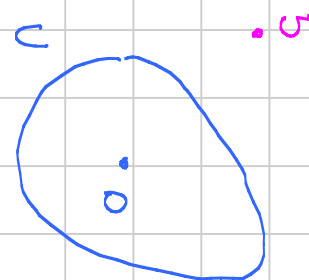
$$C = \{ v \in V : p(v) < 1 \}$$

Dim. Poniamo per semplicità

$$A(v) := \left\{ \alpha > 0 : \frac{v}{\alpha} \in C \right\} \subseteq (0, +\infty)$$

in modo tale che $p(v) = \inf A(v)$. Alcune proprietà

- $A(v) \neq \emptyset$ (uso che 0 è p.to interno)
- $A(v)$ è una semiretta destra (uso stellatura)
- $A(v)$ è aperto (uso che tutto C è aperto)
- $p(v) \notin A(v)$



(1) Due verifiche

- Pos. omogenea : segue da $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ per ogni $\lambda > 0$.
- Sub-additività : segue da

$$A(v_1 + v_2) \supseteq A(v_1) + A(v_2) \quad \forall (v_1, v_2) \in V^2$$

(somma di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$)

Fatto questo, l'inf. della somma è la somma degli inf.
Come dimostro l'inclusione?

Siano $\alpha_1 \in A(v_1)$ e $\alpha_2 \in A(v_2)$. Serve che
 $\alpha_1 + \alpha_2 \in A(v_1 + v_2)$

$$\frac{v_1 + v_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \boxed{\frac{v_1}{\alpha_1}} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \boxed{\frac{v_2}{\alpha_2}} \in C$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\in C \quad \in C$
numeri pos. con somma 1

uso davvero
 C convesso

(2) $p(v) \geq 0$ è ovvio.

Serve $p(v) \leq M \|v\|$. Esiste $r > 0$ t.c. $\bar{B}(0, r) \subseteq C$.

Dico che vale con $M = \frac{1}{r}$.

Basta osservare che $\frac{1}{r} \|v\| \in A(v)$ cioè che

$$\frac{v}{\frac{1}{r} \|v\|} \in \bar{B}(0, r) \subseteq C.$$

$$(3) \quad C = \{v \in V : p(v) < 1\}$$

⊆ Se $v \in C$, allora $1 \in A(v) \Rightarrow p(v) < 1$ (uso $A(v)$ aperto)

⊇ Se $p(v) < 1$, allora $1 \in A(v) \Rightarrow v \in C$.
— o — o —

Prop. Siano V e C come nella prop. prec.
 $\uparrow$
convesso, aperto, $0 \in C$

Sia $v_0 \notin C$.

Allora possiamo separare debolmente v_0 e C .

Dim. Sia $E = \text{Span}(v_0)$. Definisco $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$f(\alpha v_0) := \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

È lineare e verifica $f(\alpha v_0) \leq p(\alpha v_0)$
 $\uparrow$ pseudonorma associata a C

Perché? Devo dim. che $\alpha \leq p(\alpha v_0)$. Se $\alpha \leq 0$ è evidente.

Se $\alpha > 0$ uso pos. omog. e mi riduco a

$$\alpha \leq \alpha p(v_0) \rightsquigarrow 1 \leq p(v_0)$$

$\uparrow$ segue dalla (3) di prima

HB estende f a tutto V rispettando la disug. con p .

Ora

$$f(v) \leq p(v) < 1 = f(v_0) \quad \forall v \in C$$

cioè vale la sep. debole.

Devo ancora dim. che f è continua. D'altra parte

$$f(v) \leq p(v) \leq M \|v\| \quad \forall v \in V$$

$\uparrow$ (2)

e questo implica la continuità. Nota bene: se $f(v) < 0$, allora

$$|f(v)| = -f(v) = f(-v) \leq M \|-v\| = M \|v\|.$$

— 0 — 0 —

Prop. Sia V sp. normato, sia $C \subseteq V$ convesso, aperto, $\neq \emptyset$,
sia $v_0 \notin C$.

Allora posso separare debolmente C da v_0

Dim. Scelgo a caso $w_0 \in C$ e osservo che

$C - w_0$ e $v_0 - w_0$
ricadono nella prop. prec.

Dim. 1ª forma geo. A convesso e aperto $\neq \emptyset$
 B convesso $\neq \emptyset$
 $A \cap B = \emptyset$

Considero $C := A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$

$$= \bigcup_{a \in A} \{a\} - B$$

Allora C è convesso, $\neq \emptyset$, aperto e $0 \notin C$.

Allora lo posso separare debolmente da 0 , cioè esiste $f \in V'$ t.c.

$$0 = f(0) < f(a - b) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

$$\text{cioè} \quad f(a) > f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

Dim 2ª forma geometrica A convesso cpl $\neq \emptyset$
 B convesso chiuso $\neq \emptyset$
 $A \cap B = \emptyset$

Voglio separare forte.

Per $\varepsilon > 0$ poniamo

$$A_\varepsilon := A + B(0, \varepsilon)$$

(ε -cintorni di A e B)

$$B_\varepsilon := B + B(0, \varepsilon)$$

A_ε e B_ε sono aperti se uso palle aperte.

Claim: per ε piccolo sono disgiunti, anche con $\varepsilon = \frac{1}{n}$

Se non lo fossero, per ogni $n \in \mathbb{N}$ troverei

$$a_n \in A, \quad b_n \in B, \quad z_n \in B(0, \frac{1}{n}), \quad w_n \in B(0, \frac{1}{n})$$

$$\text{tali che} \quad a_n + z_n = b_n + w_n$$

Ora A è cpt., quindi esiste $a_{n_k} \rightarrow a_\infty$. Ma allora

$$b_{n_k} = \underbrace{a_{n_k}}_{\downarrow a_\infty} + \underbrace{z_{n_k}}_{\downarrow 0} - \underbrace{w_{n_k}}_{\downarrow 0} \rightarrow a_\infty$$

Essendo B chiuso avremmo $a_\infty \in B$ e anche ad A .

Ora sia $A_{\varepsilon_0} \cap B_{\varepsilon_0} = \emptyset$ e sia f una separazione debole tra questi.

Claim: f è separazione forte tra A e B

$$f(a + \varepsilon_0 z) < f(b + \varepsilon_0 w)$$

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B$$

$$\forall z \in B(0, 1) \quad \forall w \in B(0, 1)$$

cioè

$$f(a) + \varepsilon_0 f(z) < f(b) + \varepsilon_0 f(w)$$

Scelgo z_0 t.c. $f(z_0) > 0$ e pongo $z = z_0$ e $w = -z_0$
Otengo

$$f(a) + \varepsilon_0 f(z_0) < f(b) - \varepsilon_0 f(z_0)$$

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Prendo δ fra i due insiemi e pongo

$$\delta_1 := \delta - \varepsilon_0 f(z_0) < \delta + \varepsilon_0 f(z_0) =: \delta_2.$$

Oss. Poteno ingrassare uno solo dei 2 e andava bene uguale.

Teorema (Convesso + chiuso forte $\Rightarrow$ chiuso debole)

Sia V sp. normato, sia $C \subseteq V$ convesso e chiuso forte.
Allora C è chiuso debole.

Dim. Sia $\{u_n\} \subseteq C$ tale che $u_n \rightarrow u_\infty$.

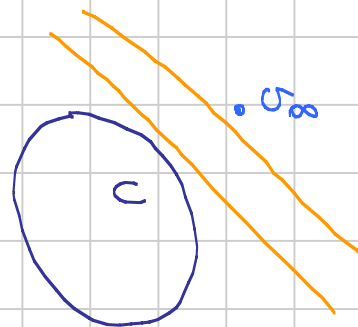
Dobbiamo dimostrare che $u_\infty \in C$.

Se così non fosse, sarebbe $u_\infty \notin C$,

ma allora per separazione forte

punto vs convesso chiuso

esiste $f \in V'$ ed esistono $\delta_1 < \delta_2$ t.c.



$$f(c) \leq \delta_1 < \delta_2 = f(u_\infty) \quad \forall c \in C.$$

La applico con $c = u_n$ e passandolo al limite ho un assurdo.

— o — o —