

CONVERGENZA DEBOLE E DEBOLE *

Def. Sia V sp. normato e V' il suo duale topologico (che è sempre Banach, anche se V non lo è).

(1) Se $\{u_n\} \subseteq V$ una succ. e $u_\infty \in V$, si dice che

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad (\text{conv. deb. in } V)$$

se

$$f(u_n) \rightarrow f(u_\infty) \quad \forall f \in V'$$

(2) Sia $\{f_n\} \subseteq V'$ una succ. e $f_\infty \in V'$. Si dice che

$$f_n \xrightarrow{*} f_\infty \quad (\text{conv. debole } * \text{ in } V')$$

se

$$f_n(u) \rightarrow f_\infty(u) \quad \forall u \in V$$

conv. puntuale dell' Analisi 2

Oss. Questa nozione di conv. debole coinciderà con la precedente negli Hilbert quando dimostreremo che il duale di un Hilbert sono le funzioni che si rappresentano con il prod. scalare.

Proprietà semplici (di conv. debole e debole *)

(1) Unicità del limite

(2) Linearità

(3) Forte $\Rightarrow$ debole

(4) Passaggio a s.succ. $(u_n \rightarrow u_\infty \Rightarrow u_{n_k} \rightarrow u_\infty)$
(idem per debole *)

Dim. unicità Supp. $u_m \rightarrow u_\infty$ e $u_m \rightarrow \hat{u}_\infty$. Allora

$$f(u_\infty - \hat{u}_\infty) = f(u_\infty) - f(\hat{u}_\infty) = 0 \quad (\text{ciascuno è limite di } f(u_m))$$

per ogni $f \in V'$. Sarebbe che per ogni $v \in V$ con $v \neq 0$ esiste $f \in V'$ t.c. $f(v) \neq 0 \leadsto$ uso funzionale allineato
(quindi HB, quindi CA).
— o — o —

Domanda: vale un lemma della sotto-sotto?
— o — o —

Teorema (SCI della norma)

Sia V sp. normato e V' duale.

(1) Se $u_m \rightarrow u_\infty$ in V , allora

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_V \geq \|u_\infty\|_V$$

(2) Se $f_m \xrightarrow{*} f_\infty$ in V' , allora

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_{V'} \geq \|f_\infty\|_{V'}.$$

Dim. (1) Sia $f \in V'$ con $\|f\|_{V'} \leq 1$. Allora

$$|f(u_m)| \leq \|f\|_{V'} \cdot \|u_m\|_V \leq \|u_m\|_V.$$

Passo al $\liminf$:

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_V \geq \liminf_{m \rightarrow \infty} |f(u_m)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f(u_m)| = |f(u_\infty)|$$

Ora basta fare il sup del RHS, o più brevemente usare f = funzionale allineato di u_∞ .

(2) Sia $v \in V$ con $\|v\|_V \leq 1$. Allora

$$|f_n(v)| \leq \|f_n\|_{V'} \cdot \|v\|_V \leq \|f_n\|_{V'}.$$

Come prima:

$$\liminf \|f_n\|_{V'} \geq \lim |f_n(v)| = |f_\infty(v)|$$

Ora faccio davvero il sup.

— o — o —

Oss. Stessa dim. in linguaggio + astratto.

(1) La funzione $v \rightarrow \|v\|_V$ è il sup (anzi il max) di funzioni lineari, dunque debolmente continue, dunque debolmente SCI. Fatto generale: sup di SCI è SCI.

— o — o —

Teorema (Compattezza debole * delle palle)

Sia V sp. normato e sia V' il duale.

Sia $\{f_n\} \subseteq V'$ una successione.

Supponiamo che

(i) $\{f_n\}$ limitata in V'

(ii) V sia separabile.

Allora esiste s.succ. che converge debole *, cioè esiste n_k succ. cresc. di interi positivi, ed esiste $f_\infty \in V'$, t.c.

$$f_{n_k} \xrightarrow{*} f_\infty.$$

Dim. Sia $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|f_n\|_{V'} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Step 1 Accontentiammo un denso numerabile $D \subseteq V$.
Dimostriamo che esiste m_k tale che

$$f_{m_k}(d) \rightarrow \text{qualcosa} =: f_\infty(d) \quad \forall d \in D$$

$\uparrow$ stesso per ogni $d \in D$

Questo ci permette di definire $f_\infty : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Fissato $d \in D$ vale che $|f_n(d)| \leq \|f_n\|_{V'} \cdot \|d\|_V \leq M \|d\|_V$
quindi $f_n(d)$ ammette s.succ. conv.

Con procedimento diag. la s.succ. diventa indip. da d .
(paroline nel video).

Step 2 Mostriamo che per ogni $v \in V$ si ha che

$$f_{m_k}(v) \rightarrow \text{qualcosa} =: f_\infty(v)$$

$\uparrow$ stessa s.succ. che andava bene in D

Idea: mostrare che $\{f_{m_k}(v)\}$ è di Cauchy, usando

$$|f_{m_k}(v) - f_{m_\ell}(v)| \leq |f_{m_k}(v) - f_{m_k}(d)| + \quad (1)$$

$$+ |f_{m_k}(d) - f_{m_\ell}(d)| \quad (2)$$

$$+ |f_{m_\ell}(d) - f_{m_\ell}(v)| \quad (3)$$

Ora (1) e (3) sono piccoli se d è vicino a v , e (2) è piccolo se k e ℓ sono grandi.

Formalmente:

• ci viene dato $\varepsilon > 0$

• scegliamo $d \in D$ t.c. $M \|v - d\|_V \leq \frac{1}{4} \varepsilon$
 $\uparrow$
bound sulle norme

- Visto d, scegliamo $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. ② è $\leq \frac{1}{4}\epsilon$ se $k, Q \geq k_0$
- Concludiamo che per $Q, k \geq k_0$ vale

$$|f_{n_k}(v) - f_{n_Q}(v)| \leq \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \leq \frac{3}{4}\epsilon$$

Ora abbiamo definito $f_\infty : V \rightarrow \mathbb{R}$

Step 3 Verifichiamo che $f_\infty \in V'$.

- Linearità: Dimite puntuale di lineari è lineare
- Continuità: " " di M lip. è M lip.

— o — o —

Esercizio Provare a ripetere la dimostrazione per avere cpt. debole palle in V , e vedere dove ci si pianta.

— o — o —

TEOREMI DI SEPARAZIONE

Def. Sia V sp. normato, sia V' il duale, siano $A \subseteq V$ e $B \subseteq V$ due sottoinsiemi (disgiunti).

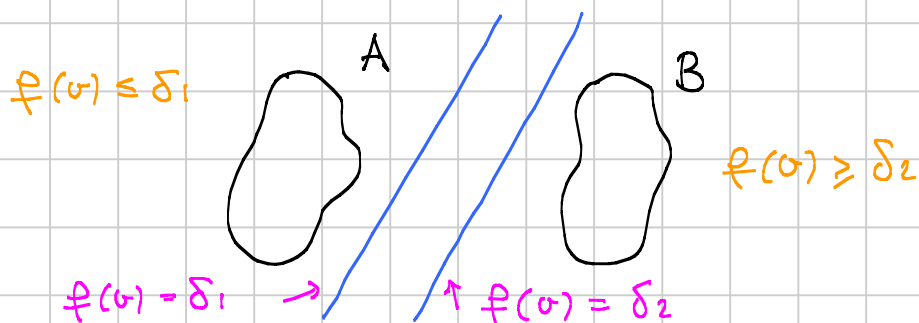
(1) Si dice che $f \in V'$ separa debolmente A e B se

$$f(a) < f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

(2) Si dice che $f \in V'$ separa fortemente A e B se esistono $\delta_1 < \delta_2$ t.c.

$\uparrow$ stretto

$$f(a) \leq \delta_1 < \delta_2 \leq f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$



Teorema (Separazione debole) (1ª forma geo. di HB)

Siano V e V' come sempre. Siano A e B contenuti in V t.c.

(1) non vuoti e disgiunti

(2) CONVESSI

(3) A aperto

Allora esiste separazione debole.

Teorema (Separazione forte) (2ª forma geo. di HB)

Siano V e V' come sempre. Siano A e B contenuti in V t.c.

(1) non vuoti e disgiunti

(2) CONVESSI

(3) A compatto, B chiuso

Allora esiste separazione forte.

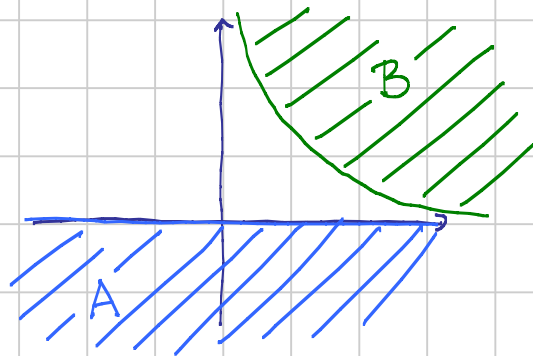
Corollario In particolare esiste una separazione forte di un p.to (compatto) da un convesso chiuso non vuoto.

Esempio 1 Nelle ipotesi del 1º non si può avere separazione forte.

(Già in $\mathbb{R}^2$: A = palla aperta, B = p.to del bordo)

Esempio 2 Due convessi chiusi si potrebbero non separare forte

In $\mathbb{R}^2$



In questo caso $f(x,y) := y$ separa debole ma non forte.

In dim. infinita potrebbero non separarsi nemmeno debole.

— o — o —