

Oss. Se $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare e

$$f(v) \leq \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

allora

$$|f(v)| \leq \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Dim Se $f(v) \geq 0$ è ovvio. Se $f(v) < 0$, allora

$$|f(v)| = -f(v) = f(-v) \leq \|-v\|_V = \|v\|_V.$$

— o — o —

Oss. Se H è spazio di Hilbert e $v_0 \in H \setminus \{0\}$, allora UN (ma un giorno sarà IL) funzionale allineato è

$$f(v) = \frac{1}{\|v_0\|} \langle v, v_0 \rangle \quad \forall v \in H$$

Infatti $f(v_0) = \|v_0\|$ e $|f(v)| \leq \frac{1}{\|v_0\|} \|v\| \cdot \cancel{\|v_0\|} = \|v\|$

↑
c.s.

— o — o —

Esempio (Non unicità del funzionale allineato)

Sia $V = \mathbb{R}^2$ con la norma

$$\|(x, y)\|_1 := |x| + |y|$$

Considero $v_0 := (1, 0)$ e dico che ha almeno due funz. allineati

$$\varphi_1(x, y) = x$$

$$\varphi_2(x, y) = x + y$$

$$\text{Ovvio: } \varphi_1(1, 0) = \varphi_2(1, 0) = 1 = \|(1, 0)\|_1$$

Devo verificare che sono 1-Lip.

$$|\varphi_1(x, y)| = |x| \leq \|(x, y)\|_1$$

$$|\varphi_2(x, y)| = |x+y| \leq \|(x, y)\|_1$$



Come sono fatti TUTTI i funzionali allineati di $(1,0)$?

Saranno del tipo $f(x, y) = ax + by$ (geometria 1)

- $f(1, 0) = 1 \Leftrightarrow a = 1$
- chi è la costante di Lip di $f(x, y)$? Dico che è $\max\{|a|, |b|\}$

$$|f(x, y)| = |ax + by| \leq |a| \cdot |x| + |b| \cdot |y|$$

$$\leq \max\{|a|, |b|\} (|x| + |y|)$$

$$= \max\{|a|, |b|\} \cdot \|(x, y)\|_1$$

Questo dice che $\text{cost. Lip} \leq \max\{|a|, |b|\}$.

Per la disug. opposta, supponiamo WLOG $\max = |b|$.

Allora usando $(x, y) = (0, \text{sign } b)$ otteniamo

$$f(x, y) = b \cdot \text{sign } b = |b| \quad \text{e} \quad \|(x, y)\|_1 = 1$$

I funzionali allineati verificano

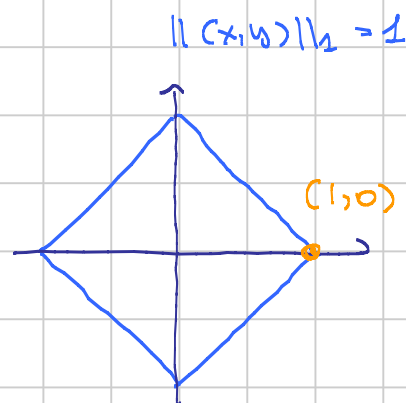
$$a = 1 \quad \text{e} \quad \max\{|a|, |b|\} = 1$$

quindi sono tutti e soli quelli del tipo

$$f(x, y) = x + by \quad \text{con} \quad |b| \leq 1.$$

Oss. La causa della non unicità è il fatto che la palla ha un angolo nel p.to in questione.

(provare a vedere che succede in $(1, 1)$)



SPAZI DI OPERATORI LINEARI E CONTINUI

Def. Siano V e W sp. vett. normati.

Si indica con $\mathcal{L}(V, W)$ l'insieme di tutte le applic. lineari e continue $f: V \rightarrow W$.

Per ogni f di questo tipo poniamo

$$\|f\|_{\mathcal{L}(V, W)} := \sup \{ \|f(v)\|_W : v \in V, \|v\|_V \leq 1 \}$$

Prop. Setting come nella definizione.

Valgono i seguenti fatti.

(1) $\mathcal{L}(V, W)$ è uno sp. vettoriale

(2) $\|f\|_{\mathcal{L}(V, W)}$ è una norma in tale spazio

(3) La norma è la costante di Lipschitz

(4) Se W è completo (Banach), allora $\mathcal{L}(V, W)$ è completo (quindi Banach)

(5) Vale la stima

$$\|f(v)\|_W \leq \|f\|_{\mathcal{L}(V, W)} \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

Dim (1) e (2) sono semplici verifiche

(3) e (5) sono la stessa cosa e seguono dalla linearità come nelle 7 sfumature

Resta da dimostrare (4). Sca $\{f_n\}$ una succ. di Cauchy in $\mathcal{L}(V, W)$. Dimostriamo intanto che ha limite puntuale.

Fissato $v \in V$ vale

$$\|f_n(v) - f_m(v)\|_W = \|(f_n - f_m)(v)\|_W \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(V, W)} \cdot \|v\|_V$$

Quindi $\{f_n(v)\}$ è di Cauchy in W , quindi ha un limite che chiamo $f_\infty(v)$.

- È lineare $\leadsto$ quasi ovvio

- è continuo $\leadsto$ segue dal fatto generale che il limite puntuale di funzioni equi-lip è lip.

- Resta da dim. che il limite $f_n \rightarrow f_\infty$ è nella norma di $\mathcal{L}(X, Y)$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $v \in V$ con $\|v\| \leq 1$.

Allora per $n, m \geq n_0$ vale

$$\|f_n(v) - f_m(v)\|_W \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(\dots)} \cdot \underbrace{\|v\|_V}_{\leq 1} \leq \varepsilon$$

Ora ε non dipende da v se $\|v\|_V \leq 1$. Mandando $m \rightarrow +\infty$ e si ottiene

$$\|f_n(v) - f_\infty(v)\|_W \leq \varepsilon \quad \forall v \in V \text{ con } \|v\|_V \leq 1$$

Facciamo il sup in v vale $\|f_n - f_\infty\|_{\mathcal{L}(\dots)} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Def. (Duale topologico)

Dato V sp. vett. normato, si definisce duale topologico lo spazio V' di tutte le $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineari e continue.

Oss. Lo spazio V' è un Banach anche se V non era completo (qui serve che $\mathbb{R}$ è completo)

La norma in V' è definita come

$$\|f\|_{V'} := \sup \{ |f(v)| : v \in V, \|v\|_V \leq 1 \}$$

Prop. (Caratterizzazione duale della norma)

Sia V sp. vett. normato, e sia $v_0 \in V$.

Allora

$$\begin{aligned} \|u_0\|_V &= \sup \{ |f(u_0)| : f \in V', \|f\|_{V'} \leq 1 \} \\ &= \max \{ \quad \quad \quad \} \end{aligned}$$

Dann $\boxed{\geq}$ $|f(u_0)| \leq \|f\|_V \cdot \|u_0\|_V \leq \|u_0\|_V$
 ≤ 1

☞ Funzionale allineato !!

1 0 1 0 1

Esercizio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ insieme limitato, misurabile
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$. Allora vale

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx$$

$\uparrow$ norma di $\mathbb{R}^k$

Se $f = (f_1, \dots, f_k)$, allora $\int_{\Omega} f = \left(\int_{\Omega} f_1, \dots, \int_{\Omega} f_k \right)$

Vale com uma qualquer norma?

Sì! Dimostrazione per dualità. Osserviamo che per ogni

$$L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

Lineare e continuo vale

$$L\left(\int_a^b f(x) dx\right) = \int_a^b L(f(x)) dx \quad (\text{linearità dell'integrale})$$

Se $\|L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})} \leq 1$, allora

analisi:

$$\left| L \left(\int_{\Omega} f(x) dx \right) \right| \stackrel{\downarrow}{\leq} \int_{\Omega} |L f(x)| dx$$

$$\leq \int_{\Omega} \underbrace{\|L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})}}_{\leq 1} \cdot \|f(x)\|_{\mathbb{R}^k} dx$$

$$\leq \int_{\Omega} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^k} dx$$

Per concludere basta osservare che $\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\|$ è

uguale al sup del LHS al variare di L con $\|L\|_{\mathcal{L}(\dots)} \leq 1$.

— o — o —