

APPLICAZIONI LINEARI E CONTINUE

Setting: V e W sp. vettoriali normati

Chiamiamo $f: V \rightarrow W$ lineari e continue

Domande: ① Esiste $f: V \rightarrow W$ lineare non banale $f \neq 0$

② " " e continua "

③ " " e NON continua

CA: Choice Axiom (assioma di scelta)

Risposta ① : CA $\Rightarrow$ Zorn $\Rightarrow$ esiste base algebrica di V
(base di Hamel)

A quel punto manco dove vi pone gli el. della base ed estendo per linearità

Domanda: cosa vuol dire lineare e continuità.

Prop. ($\exists$ sfumature di continuità)

Siano V e W sp. normati e sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

(i) f è continua per successioni,

(i') f è " " in $v=0$,

(ii) f è continua ε/δ

(ii') f " in $x=0$

(iii) f manda limitati di V in limitati di W

(iii') $f(B_V(0,1))$ è limitato in W

(iv) f è Lipschitziana

Dim (i) $\Rightarrow$ (i'), (ii) $\Rightarrow$ (ii'), (iii) $\Rightarrow$ (iii')

La viceversa segue dalla linearità, ad esempio supponiamo (iii') e dimostriamo (iii). Dato $B \subseteq V$ limitato, esiste $R > 0$ t.c. $B \subseteq B_V(0, R)$ e quindi

$$\varphi(B) \subseteq \varphi(B_V(0, R)) = R \varphi(B_V(0, 1)) \leftarrow \text{limitato in } W$$

$\uparrow$
 φ lineare

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): fatto generale in spazi metrici

(iii') $\Rightarrow$ (ii'): dato $\varepsilon > 0$ devo trovare $\delta > 0$ t.c.

$$\varphi(B_V(0, \delta)) \subseteq B_W(0, \varepsilon)$$

Supponiamo $\varphi(B_V(0, 1)) \subseteq B_W(0, R)$ (ipotesi (iii'))

Allora preso $\delta := \frac{\varepsilon}{R}$ avremo che

$$\varphi(B_V(0, \frac{\varepsilon}{R})) = \frac{\varepsilon}{R} \varphi(B_V(0, 1)) \subseteq \frac{\varepsilon}{R} B_W(0, R) = B_W(0, \varepsilon)$$

(ii') $\Rightarrow$ (iii') Applico continuità ε/δ con $\varepsilon = 1$. Trovo $\delta > 0$ tale che

$$\varphi(B_V(0, \delta)) \subseteq B_W(0, 1). \quad \text{Ma allora}$$

$$\varphi(B_V(0, 1)) \subseteq B_W(0, \frac{1}{\delta})$$

Fino qui tutte le prime 6 sono equivalenti.

(iv) $\Rightarrow$ resto: ovvio

Manca: qualcosa $\Rightarrow$ (iv). Usiamo (iii') $\Rightarrow$ (iv)

Supponiamo $\varphi(B_V(0, 1)) \subseteq B_W(0, R)$ e deduciamo che

f è $\mathbb{R}$ -lipschitziana.

$$\|f(y) - f(x)\|_W = \|f(y-x)\|_W \leq R \|y-x\|_V$$

Posto $\delta = \|y-x\|_V$ abbiamo che $y-x \in B_V(0, \delta)$ e quindi $f(y-x) \in B_W(0, R\delta)$ e quindi

$$\|f(y-x)\|_W \leq R\delta = R\|y-x\|_V.$$

— 0 — 0 —

Risposta ③ Se V è sp. normato di dim. infinita, allora esiste $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e NON continua.

Dim. Dimensione infinita $\Rightarrow$ esiste succ. $\{v_n\}$ di vettori lineari. indip. (facile esercizio)

CA $\Rightarrow$ posso completarli ad una base di Hamel

Pongo (suppongo $\|v_n\|_V = 1$)

$$f(v_n) := n$$

f (altri elem. della base) = 0 (o qualunque cosa)

Questa non soddisfa (iii'), e quindi non è continua

— 0 — 0 —

Def (Pseudo-norma) Sia V uno sp. vett.

Una pseudo-norma in V è una funzione

$$p: V \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

(i) (subadditiva)

$$p(v+w) \leq p(v) + p(w) \quad \forall (v, w) \in V^2$$

(ii) (positivamente omogenea)

$$p(\lambda v) = \lambda p(v)$$

$$\forall v \in V$$

$$\boxed{\forall \lambda > 0}$$

(Nessuna ipotesi di segno)

TEOREMA (HAHN-BANACH, forma analitica)

Sia V sp. vett., sia $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ pseudonorma, sia $E \subseteq V$ s.sp. vett., sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e tale che

$$f(v) \leq p(v) \quad \forall v \in E.$$

Allora (è possibile estendere f conservando la disuguaglianza) esiste $\hat{f}: V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\hat{f}$ è lineare e

$$\hat{f}(v) = f(v) \quad \forall v \in E$$

$$\hat{f}(v) \leq p(v) \quad \forall v \in V.$$

Dim Considero $\mathcal{Y} := \{ (F, \varphi) : E \subseteq F \subseteq V \text{ s.sp. e } \varphi: F \rightarrow \mathbb{R} \text{ è lineare ed estende } f \text{ mantenendo la disug. su } F \}$

Osserviamo che $\mathcal{Y}$ è ordinata parzialmente da

$$(F_1, \varphi_1) \leq (F_2, \varphi_2) \Leftrightarrow F_1 \subseteq F_2 \text{ e } \varphi_2(v) = \varphi_1(v) \quad \forall v \in F_1$$

Ogni catena di $\mathcal{Y}$ (sottoinsieme totalmente ordinato) ammette maggiorante. Sia $\{(F_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ la catena. Il maggiorante è

$$(F_\infty, \varphi_\infty) \text{ con } F_\infty := \bigcup_{i \in I} F_i \text{ e}$$

$$\varphi_\infty(v) = \varphi_i(v) \text{ se } v \in F_i \quad (\text{verificare che è ben posta})$$

CA $\Rightarrow$ ZORN $\Rightarrow$ esiste in $\mathcal{Y}$ un elemento (F, g) massimale

Claim: $F = V$. Se così non fosse, prendo $v_0 \in V \setminus F$ e provo ad estendere g a $F + \mathbb{R}v_0 = \text{Span}(F, v_0)$

Devo definire $g(v_0)$ e poi potrò porre

$$g(v + \alpha v_0) := g(v) + \alpha g(v_0)$$

L'unica cosa non ovvia è la disug. con la pseudonorma.
Seme

$$g(v + \alpha v_0) \leq p(v + \alpha v_0) \quad \forall v \in F \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ci sono 3 casi

- Se $\alpha = 0$ non è difficile $\therefore$
- Se $\alpha > 0$ raccolgo e porto fuori

$$\cancel{\alpha} g\left(v_0 + \underbrace{\frac{v}{\alpha}}_{\substack{\uparrow \\ \text{generico elemento di } F}}\right) \leq \cancel{\alpha} p\left(v_0 + \frac{v}{\alpha}\right)$$

quindi seme

$$g(v_0 + y) \leq p(v_0 + y) \quad \forall y \in F$$

cioè

$$g(v_0) \leq p(v_0 + y) - g(y) \quad \forall y \in F$$

- Se $\alpha < 0$ poniamo $\alpha = -\beta$ con $\beta > 0$ e troviamo

$$g(v - \beta v_0) \leq p(v - \beta v_0)$$

Porto fuori β e otteniamo

$$\cancel{p} g\left(\frac{u}{p} - v_0\right) \leq \cancel{p} p\left(\frac{u}{p} - v_0\right)$$

$\uparrow$ generico elemento

$$g(z - v_0) \leq p(z - v_0)$$

cioè

$$g(v_0) \geq g(z) - p(z - v_0) \quad \forall z \in F$$

Mettendo insieme le 2 condizioni

$$g(z) - p(z - v_0) \leq g(v_0) \leq p(v_0 + y) - g(y)$$

per ogni z e y in F . Posso trovare $g(v_0)$ se e solo se

$$g(z) - p(z - v_0) \leq p(v_0 + y) - g(y) \quad \forall (z, y) \in F^2$$

Sarà vera? È equivalente a

$$g(z) + g(y) \stackrel{?}{\leq} p(z - v_0) + p(v_0 + y)$$

e questa segue da

$$g(z) + g(y) = g(z + y) \leq p(z + y)$$

$\uparrow$
vale
in F

$$= p((z - v_0) + (v_0 + y))$$

$$\leq p(z - v_0) + p(v_0 + y).$$

— o — o —

Def. (Funzionale ALLINEATO)

Sia V sp. normato e sia $v_0 \in V$.

Allora esiste $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ continua e lineare t.c.

$$f(v_0) = \|v_0\|$$

$$|f(v)| \leq \|v\|_V \quad (\text{quindi } f \text{ è 1-Lip.})$$

Dim Poniamo $E := \text{Span}(v_0)$ e definiamo $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\alpha v_0) = \alpha \|v_0\|$$

Si verifica che è lineare e $f(v) \leq \|v\|_V$ per ogni $v \in E$
 $\uparrow$ pseudo-norma

Hahn-Banach fa il lavoro sporco.
— o — o —

Corollario Esiste $f: V \rightarrow W$ lineare, continua, $\neq 0$
 $\uparrow \quad \uparrow$
sp. normati

Dim $V \xrightarrow{\quad} \mathbb{R} \xrightarrow{\quad} W$
 $\uparrow \quad \uparrow$
funzionale lineare che esiste $\neq 0$.
allineato
— o — o —