

TEOREMA DI BROUWER Sia $d \geq 1$ intero ed $R > 0$. Sia

$$f: \bar{B}(0, R) \rightarrow \bar{B}(0, R)$$

una funzione continua.

Allora f ammette ALMENO un p.to fisso ($f(x) = x$).

Dim.: vedi corsi di geometria. 😊

Teorema di Brouwer modificato Sia $d \geq 1$ intero, sia $D \subseteq \mathbb{R}^d$
compatto e convesso

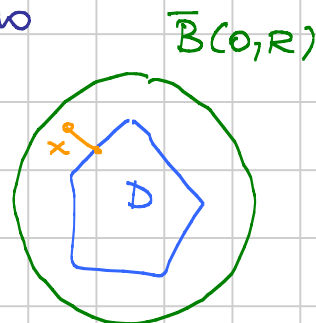
e sia $f: D \rightarrow D$ continua.

Allora f ammette almeno un p.to fisso.

Dim. Sia $R > 0$ t.c. $D \subseteq \bar{B}(0, R)$. Definiamo

$$\hat{f}: \bar{B}(0, R) \rightarrow \bar{B}(0, R)$$

ponendo $\hat{f}(x) := f(P_D(x))$
 $\uparrow$ proiezione su
 convesso chiuso



Esendo $\hat{f}$ continua, per Brouwer classico esiste $\hat{x} \in \bar{B}(0, R)$ tale che

$$\hat{x} = \hat{f}(\hat{x}) \in D$$

e quindi $\hat{x} \in D$. Concludiamo osservando che $\hat{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in D$, dunque in particolare per $\hat{x}$.

— o — o —

Esiste un analogo di Brouwer in dimensione infinita?

Brutta notizia Anche in un Hilbert separabile di dim infinita esiste

$f: \overline{B}(0,1) \rightarrow \overline{B}(0,1)$
continua senza p.ti fissi.

Esempio classico $x \in H$ e $(x_1, x_2, \dots)$ siano le componenti di x rispetto a base ortonormale $\{e_n\}$.

Poniamo

$$f(x) = \left(\{1 - \|x\|^2\}^{1/2}, \underbrace{x_1, x_2, x_3, \dots}_{\text{componenti di } x \text{ shiftate di posto}} \right) \quad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

Verifichiamo che $f(x) \in \overline{B}(0,1)$. Infatti

$$\|f(x)\|^2 = 1 - \|x\|^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}_{\|x\|^2} = 1$$

Quindi f mappa $\overline{B}(0,1)$ nel bordo.

La continuità è un facile esercizio.

Verifichiamo l'assenza di punti fissi. Se $f(x) = x$, allora $x_1 = x_2 = x_3 = \dots$, ma allora $x = 0$, ma $f(0) = (1, 0, 0, \dots)$ e quindi non può essere fisso.

— 0 — 0 —

Buona notizia: **Teorema di SCHAUDER**

Siano $K \subseteq C \subseteq Y$ e sia $f: C \rightarrow K$ continua
 $\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
compatto convesso sp. normato

Allora f ammette almeno un p.to fisso.

Dim

Idea: approx f con approssimanti finito dimensionali su cui vale Brouwer classico e passo al limite.

I dettagli sono delicati (vicoli ciechi).

Per ogni intero $n \geq 1$ applichiamo il lemma di proiezione non lineare a K con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Troviamo

$P_n : K \rightarrow K_n =$ sviluppo convesso di numero finito di punti di K , dunque contenuto in C e in s.p. $Y_n \subseteq Y$ di dimensione finita.

Ora consideriamo $f_n : K_n \rightarrow K_n$ come

$$f_n(x) := P_n(\underbrace{f(x)}_{\in K}) \quad \forall x \in K_n$$

$\nwarrow \in C$

Essendo f_n continua ed in dim. finita possiamo applicare Brouwer modificato: esiste $x_n \in K_n$ t.c. $f_n(x_n) = x_n$.

Poniamo $y_n := \underbrace{f(x_n)}_{\text{senza } n} \in K$ e quindi esiste $y_{n_k} \rightarrow y_\infty \in K$

Claim: $x_{n_k} \rightarrow y_\infty$ e vale $f(y_\infty) = y_\infty$.

Verifichiamo primo claim:

$$\|y_\infty - x_{n_k}\|_Y = \|y_\infty - \underbrace{f_{n_k}}_{x_{n_k} \text{ p.to fisso}}(x_{n_k})\|$$

$$\leq \|y_\infty - f(x_{n_k})\| + \|f(x_{n_k}) - \underbrace{f_{n_k}}_{\in K}(x_{n_k})\|$$

$$= \underbrace{\|y_\infty - y_{n_k}\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\| \overbrace{f(x_{n_k})}^{\in K} - P_{n_k}(f(x_{n_k})) \|}_{\leq \frac{1}{n_k}} \leq \frac{1}{n_k}$$

Verifica secondo claim : poiché $x_{n_k} \rightarrow y_\infty$ vale

$$f(y_\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_\infty.$$

$\uparrow$
 f continua

— o — o —

Applicazione classica: teo. di sda esistenza per eq. diff.

Analisi 2 : Setting

• $k \geq 1$ intero

• $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}^k$

• $\delta_0 > 0$ ed $r > 0$

• $f : [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \bar{B}(u_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^k$ cont.

$\uparrow$ palla in $\mathbb{R}^k$

Consideriamo il pbm. di Cauchy

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

$$u(t_0) = u_0$$

e cerchiamo una soluzione locale $u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Poniamo $M := \max \{ |f(t, u)| : t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0], u \in \bar{B}(u_0, r) \}$

e scegliendo $\delta > 0$ t.c.

$$\delta \leq \delta_0 \quad \text{e} \quad \delta M \leq r$$

otteniamo ALMENO una soluzione definita su $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Tre possibili dimostrazioni

① Approssimando f mediante funzioni Lip

② Utilizzando pbm. con ritardo alla TONELLI

③ Usando SCHAUDER

} corso di
Analisi 2

Dim ③ Scriviamo l'eq. in forma integrale

$$[\Phi(u)](t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Risolvere pblm. di Cauchy è equivalente a trovare p.to fisso di Φ .
Possiamo

$$Y := \{ \text{funzioni continue } u: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^k \}$$

↑ sp. normato completo rispetto alla norma del sup

$$C := \{ \text{funzioni continue } u: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \overline{B}(u_0, r) \}$$

↑ convesso contenuto in Y (serve palla convessa)

$$K := \{ u \in C: u \text{ è Lip. con costante di Lip. } \leq M \}$$

↑ compatto $\subseteq C$ (Ascoli - Arzelà !!)

Dalle condizioni su δ segue che $\Phi: C \rightarrow C$ (si tratta di verificare che $[\Phi(u)](t) \in \overline{B}(u_0, r)$)

Si verifica che $\Phi(u) \in K$ perché $\|[\Phi(u)]'\| \leq M$.

Da Schauder segue l'esistenza di almeno un p.to fisso.

Serve anche che Φ sia continua, ma questo segue dal passaggio al limite sotto il segno di integrale rispetto alla conv. uniforme (per esercizio sistemare per bene i dettagli)

— o — o —