

APPROSSIMAZIONE DI OPERATORI COMPATTI

Prop (Limite unif. sui limitati di op. cpt. è op. cpt.)

Siano X e Y sp. normati (o anche solo metrici).

Siano $f_n: X \rightarrow Y$ e $f_\infty: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) Y è completo

(ii) f_n è op. cpt. per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iii) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui limitati di X .

Allora f_∞ è op. cpt.

Dim. Dato $B \subseteq X$ limitato, serve $f_\infty(B)$ rel. cpt.

Essendo Y completo, basta $f_\infty(B)$ sia tot. limitato

[Idea: $f_\infty(B)$ è vicino a $f_n(B)$, il quale è tot. limitato]

Traduzione formale.

• Ci viene dato $\varepsilon > 0$

• Scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. (possiamo per Hp (iii))

$$\text{dist}_Y(f_\infty(x), f_{n_0}(x)) \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in B$$

• Visto n_0 , esistono $y_1, \dots, y_k \in Y$ tali che

$$f_{n_0}(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \frac{1}{2} \varepsilon)$$

• Claim: $f_\infty(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon)$

Per ogni $x \in B$ si ha che $f_\infty(x)$ dista meno di $\frac{\varepsilon}{2}$ da $f_{n_0}(x)$,
il quale dista meno di $\frac{\varepsilon}{2}$ da uno degli y_i .

— o — o —

Esercizio Mostrare che Y completo serve davvero.

Approx. finito dimensionale in sp. di Hilbert

- Setting:
- H sp. di Hilbert SEPARABILE
 - $\{e_n\}$ base ortonormale
 - $H_n := \text{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$ (primi n vettori)
 - $P_n : H \rightarrow H_n$ proiezione ortogonale

Dato X sp. normato e data $f : X \rightarrow H$ definiamo $f_n : X \rightarrow H_n$ ponendo

$$f_n(x) := P_n(f(x)) \quad \forall x \in X.$$

- ① Se f è lineare, allora f_n è lineare (P_n è lineare)
- ② Se f è continua, allora f_n è continua (P_n è continua)
- ③ Se f è op. cpt., allora f_n è op. cpt.
(Se $B \subseteq X$ limitato $\Rightarrow f(B) \subseteq K$ cpt. in H e $P_n(K)$ è cpt sia in H_n sia in H)
- ④ L'immagine di f_n è contenuta in s.sp. di dim. finita
- ⑤ $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ per ogni $x \in X$ (conv. puntuale)
- ⑥ Se f è op. cpt., allora $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui limitati di X

Dati $B \subseteq X$ limitato ed $\varepsilon > 0$, dobbiamo trovare $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\|f(x) - f_n(x)\|_H \leq \varepsilon \quad \forall x \in B \quad \forall n \geq m_0$$

Essendo f compatto, esistono $y_1, \dots, y_k \in H$ t.c.

$$f(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon)$$

Per ogni $i = 1, \dots, k$ esiste $z_i \in \text{Span}(\{e_n\})$ t.c. $\|z_i - y_i\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$
 $\uparrow$ comb. lin. finite

Osserviamo che $B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) \subseteq B(z_i, \varepsilon)$ e quindi

$$f(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(z_i, \varepsilon).$$

Per n grande ($n \geq n_0$) accade che $z_i \in H_n$ per ogni $i=1, \dots, k$

Dico che la relazione richiesta vale per ogni $n \geq n_0$.

Dato $x \in B$ esiste $i \in \{1, \dots, k\}$ t.c.

$$f(x) \in B(z_i, \varepsilon)$$

e quindi

$$\|f(x) - f_n(x)\|_H = \|f(x) - P_n(f(x))\|_H$$

$$\leq \|f(x) - z_i\|_H \leq \varepsilon$$

↑ la proiezione minimizza la dist. da H_n
e $z_i \in H_n$ è un competitor.

— o — o —

Corollario Dati X sp. normato, H sp. Hilbert separabile, $f: X \rightarrow H$
valgono enunciati del tipo

" f è <Ipotesi su f > se e solo se è approssimabile unif.

sui limitati mediante succ. f_n che verifica <Ipotesi su f_n >

e ha immagine contenuta in s.sp. di H di dimensione finita"

in 3 casi

① H_p su f : op. cpt.

H_p su f_n : op. cpt.

② H_p su f : op. cpt. + lin.

H_p su f_n : op. lin. + cpt.

③ H_p su f : op. cpt. + cont

H_p su f_n : op. cont. (e quindi

anche compatto visto che

l'immagine è finito dimensionale)

— o — o —

Approx. finito dim. in sp. normati completi

Lemma (Proiezione non lineare) *non serve davvero*

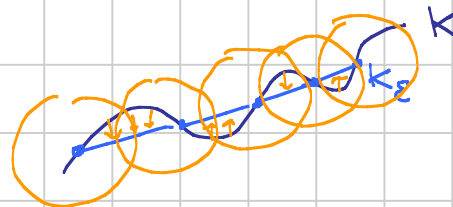
Sia Y sp. normato completo, e sia $K \subseteq Y$ un compatto, e sia $\varepsilon > 0$.

Allora esistono $K_\varepsilon \subseteq Y$ e $P_\varepsilon: K \rightarrow K_\varepsilon$ tali che

(i) K_ε è involucro convesso di numero finito di punti di K

(ii) $\|P_\varepsilon y - y\| \leq \varepsilon$ per ogni $y \in K$

(iii) P_ε è continua.



Dim Essendo K compatto, esistono $y_1, \dots, y_k \in K$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aperte}}}{B(y_i, \varepsilon)} =: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aperto}}}{A_\varepsilon}$$

Per ogni $i = 1, \dots, k$ definiamo $c_i: Y \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$c_i(y) := \max \{ 0, \varepsilon - \|y - y_i\|_Y \} \quad \text{"conetto"}$$



Poniamo $S(y) := \sum_{i=1}^k c_i(y)$ (positiva in A_ε)

e infine definiamo $P_\varepsilon: A_\varepsilon \rightarrow K_\varepsilon$

come

in particolare è definita in K

$$P_\varepsilon(y) := \sum_{i=1}^k \boxed{\frac{c_i(y)}{S(y)}} y_i$$

coeff. in $[0, 1]$ a somma 1

dove $K_\varepsilon :=$ involucro convesso degli y_i

$$= \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i : (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in [0, 1]^k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

Le richieste (i) e (iii) sono immediate dalle definizioni

Controlliamo la (ii)

$$\begin{aligned}
 \|P_\varepsilon(y) - y\|_Y &= \left\| \sum_{i=1}^k \frac{c_i(y)}{S(y)} y_i - \sum_{i=1}^k \frac{c_i(y)}{S(y)} y \right\| \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^k \frac{c_i(y)}{S(y)} (y_i - y) \right\| \\
 &\leq \sum_{i=1}^k \frac{c_i(y)}{S(y)} \underbrace{\|y_i - y\|}_{\leq \varepsilon \text{ se il coeff. è diverso da } 0} \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{c_i(y)}{S(y)} \varepsilon = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Vale un corollario quasi analogo al caso Hilbertiano.

① Un operatore $f: X \rightarrow Y$ è compatto se e solo se è
 $\uparrow$ $\uparrow$
 normato $\uparrow$ normato

Limite unif. sui cpt. di una successione di op. cpt.

$f_n: X \rightarrow Y$ la cui immagine è contenuta in s.sp. $Y_n \subseteq Y$ di dimensione finita.

② Stessa cosa con f compatto + continuo e f_n continui
 (e quindi automaticamente compatti)

Achtung! Non vale la versione con cpt. + lineare
 (ci sono controesempi strani)

Dim ① Data $f: X \rightarrow Y$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$B_n := B_X(0, 2^{-n})$. Consideriamo $f(B_n) \subseteq \hat{K}_n \subseteq Y$
 $\uparrow$
 compatto

Applichiamo il lemma di proiezione non lineare a $\hat{K}_n$ con
 $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Troviamo

$$P_n: \hat{K}_n \rightarrow K_n$$

$\uparrow$
 inviluppo convesso di numero finito
 di p.ti di $\hat{K}_n$, e quindi contenuto
 in s.sp. $Y_n \subseteq Y$ di dim. finita

Consideriamo $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come in figura.

Poniamo infine



$$f_n(x) := P_n \left(\underbrace{f \left(\varphi \left(\frac{\|x\|}{n} \right) x \right)}_{\in B_x(0, 2n)} \right)$$

e osserviamo che $f_n(x) \in K_n$ per ogni $x \in X$.

Dobbiamo verificare conv. unif. $f_n \rightarrow f$ sui limitati di X .

Dato $B \subseteq X$ limitato, per n grande vale $B \subseteq B_x(0, n)$ e quindi

$$\varphi \left(\frac{\|x\|}{n} \right) x = x \quad \forall x \in B$$

e quindi

$$\|f(x) - f_n(x)\|_Y = \|f(x) - P_n(f(x))\|_Y \leq \frac{1}{n}$$

da cui la tesi.

Dim ② Basta osservare che f_n è continua se f è continua.

— o — o —