

TEOREMA SPETTRALE

Sia H uno sp. di Hilbert e sia $A: H \rightarrow H$.

Supponiamo che

(i) H sia separabile (e di dim infinita)

(ii) A sia lineare + cpt. + simmetrico.

Allora valgono i seguenti fatti.

(1) Esiste una base ortonormale di H (numerabile) costituita da autovettori di A .

(2) Gli autovalori non nulli sono o un numero finito o una successione $\{\lambda_n\}$ con $\lambda_n \rightarrow 0$

(2 bis) L'insieme degli autovalori (lo SPETTRO di A) è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ e ha 0 come unico possibile p.to di accumulazione)

(3) Tutti gli autospazi (tranne eventualmente il ker) hanno DIMENSIONE FINITA.

Dcm. Step 1 Ripasso di geometria 1

• Autovettori con. ad autovalori diversi sono ortogonali

Siano $Av = \lambda v$ e $Aw = \mu w$. Allora

$$\begin{aligned}\lambda \langle v, w \rangle &= \langle \lambda v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \\ &= \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle &= 0 \\ \neq 0\end{aligned}$$

- Se V è s.sp. A -invariante, allora $V^\perp$ è pure A -inv.,
(e chiuso) $\uparrow$ ortogonale

Dato $w \in V^\perp$ e $v \in V$, vale

$$\langle Aw, v \rangle = \langle w, \underbrace{Av}_V \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad Aw \in V^\perp$$

Step 2 L'idea è di definire ricorsivamente una successione di sottosp. A -invarianti

$$H = V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$$

e poi applicare il quoziente di Rayleigh su ciascuno. Si ottiene una succ. di vettori $v_1, v_2, \dots$ di norma 1 t.c.

$$Av_i = q(v_i) v_i \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

Automaticamente avremo anche che

$$|q(v_1)| \geq |q(v_2)| \geq \dots$$

(sono max su spazi sempre + piccoli)

Costruzione:

- Prendo $V_1 := H$. Se $q(v) \not\equiv 0$ in V_1 trovo v_1
- Pongo

$$V_2 := \{v \in H : \langle v, v_1 \rangle = 0\}$$

e osservo che è chiuso e A -invariante, in quanto è l'ortogonale di $\text{Span}(v_1)$

Se $q(v) \not\equiv 0$ in V_2 trovo v_2

- Supponendo di aver definito $V_1, \dots, V_k$, poniamo

$$V_{k+1} := \{v \in H : \langle v, v_1 \rangle = \dots = \langle v, v_k \rangle = 0\}$$

e osserveremo che va bene.

Abbiamo 2 casi

- ① Strada facendo (magari pure subito) accade che $q(v) \equiv 0$ su qualche V_k
- ② È sempre non nullo e la costruzione prosegue all'infinito.

Step 3] Sistemiamo il 1° caso. Sia k il primo indice per cui $q(v) \equiv 0$ su V_k .
Claim: $V_k = \ker(A)$

Ipotesi: $\langle Av, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

Tesi: $Av = 0 \quad \forall v \in V$

(qui deve servire la simmetria: pensare a rotazione di 90° in $\mathbb{R}^2$)

Per ogni $v \in V$ e $w \in V$ vale

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A(v+w), v+w \rangle = \underbrace{\langle Av, v \rangle}_{\uparrow \text{simmetria}} + \underbrace{\langle Aw, w \rangle}_{=0} + 2 \underbrace{\langle Av, w \rangle}_{=0} \\ &= 2 \langle Av, w \rangle \end{aligned}$$

Quindi $\langle Av, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V$, quindi $Av = 0$.

Conclusione: abbiamo già ottenuto $v_1, \dots, v_{k-1}$ autovettori e li completiamo aggiungendo una base ortogonale del $\ker$.

Perché esiste? Perché $\ker$ è un Hilbert separabile

(Un chiuso in un metrico separabile è a sua volta separabile, ma in un topologico in generale è falso)

(nei metrici si basa sul fatto che separabile $\Leftrightarrow$ base numerabile di intorni)

Step 4 Se la costruzione va avanti all'infinito, quindi trovo $v_1, v_2, \dots$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |q(\sigma_n)| = 0$$

Infatti, se così non fosse, essendo $|q(v_m)|$ debolm. decr., avremmo che

$$|q(u_m)| \geq \lambda_\infty > 0$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \|A v_m - A v_m\|^2 &= \|q(v_m) v_m - q(v_m) v_m\|^2 \\ &= |q(v_m)|^2 \|v_m\|^2 + |q(v_m)|^2 \|v_m\|^2 \\ &\geq 2 \lambda_\infty^2 \end{aligned}$$

cioè $\{A_{\nu m}\}$ NON ha sottosucc. di Cauchy, il che è un guaio per la compattezza dell'operatore.

Step 5 Concludiamo nel caso 2.

Pouiamo

$$V_\infty := \{v \in H: \langle v, v_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i$$

$$V_\infty \text{ è il ker!!} \quad = \text{Span}(v_1, v_2, \dots)^\perp$$

Claim: V_0 è il ker!!

Basta osservare che

$$\sup \{ |q(v)| : v \in V_\infty \} \leq \sup \{ |q(v_i)| : v_i \in V_i \} = |q(v_i)| \rightarrow 0$$

Quindi $q(v) \equiv 0$ in $V_\infty \Rightarrow V_\infty = \ker$

Prendendo una base ortonormale di V_{00} e aggiungendola ai vettori già trovati abbiamo finito.

— 0 — 0 —

Esempio (Sarebbe che l'operatore sia cpt.)

$$H = L^2((0,1))$$

$$[Af](x) = x f(x)$$

$$\forall f \in H$$

• È lineare e ben definito: $f \in L^2((0,1)) \Rightarrow Af \in L^2((0,1))$

• È 1-Lipschitziano

$$\|Af\|_{L^2}^2 = \int_0^1 x^2 f(x)^2 dx \leq \int_0^1 f(x)^2 dx = \|f\|_{L^2}^2$$

• È simmetrico:

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \int_0^1 x f(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot x g(x) dx \\ &= \langle f, Ag \rangle \end{aligned}$$

• Non ha autovalori! Se fosse $Af = \lambda f$ sarebbe

$$x f(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in (0,1)$$

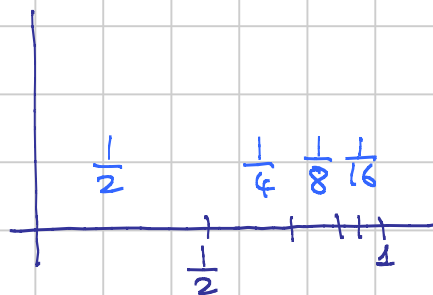
Il che non può essere se $f(x) \neq 0$ in un insieme di misura positiva.

• A non è compatto.

→ se lo fosse, avrebbe autovalori 😊

→ Con le mani, cerchiamo $\{f_n\}$ limitata tale che $\{Af_n\}$ non ha s.succ. di Cauchy.

Chiamiamo I_k gli intervalli
in figura con
 $|I_k| = \frac{1}{2^k}$



Poniamo

$$f_k(x) = \begin{cases} (\sqrt{2})^k & x \in I_k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservo che $\|f_k\|_{L^2} \equiv 1$ per ogni k e hanno supporto disgiunto, quindi

$$\|A f_m - A f_n\| = \int_{I_m} x^2 2^n + \int_{I_n} x^2 \cdot 2^m \geq \text{cost} > 0.$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 sono ben lontani da 0

— 0 — 0 —