

OPERATORI COMPATTI

Def. Siano X e Y sp. normati, e sia $f: X \rightarrow Y$.

Si dice che f è un operatore compatto se manda limitati in relativamente compatti.

In termini di successioni:

$\{x_n\} \subseteq X$ limitata $\Rightarrow \{f(x_n)\} \subseteq Y$ ammette s. succ. conv.

Oss. Si può definire con X e Y metrici.

Oss. Un operatore cpt. non è obbligato ad essere continuo (ad esempio se l'immagine sono due punti).

Prop. 1 (Lineare + cpt. $\Rightarrow$ continuo SS)

Siano X e Y normati e $f: X \rightarrow Y$. Supponiamo

(i) f lineare

(ii) f compatto.

Allora f è continuo strong-strong, cioè

$$x_n \rightarrow x_\infty \text{ in } X \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_\infty) \text{ in } Y.$$

Dim. Per linearità suppongo wlog $x_\infty = 0$.

Sia $x_n \rightarrow 0$. Supponiamo per iniziazione che $x_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\frac{x_n}{\|x_n\|_X}$ è una succ. limitata, quindi

$f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_X}\right)$ è rel. cpt. in Y , dunque limitata in Y , cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underbrace{\frac{1}{\|x_n\|_X} \|f(x_n)\|_Y}_{\text{norma di } f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_X}\right)} \leq M$$

A questo p.to $\|f(x_n)\|_Y \leq M \|x_n\|_X$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0

Nel caso generale, considero la s.succ. di quelli che sono $\neq 0$ e su quelli ottengo

$$\|f(x_n)\|_Y \leq M \|x_n\|_X \quad \forall n \in \text{s.succ.}$$

ma la stessa stima vale banalmente anche per gli x_n nulli.
 Finale come sopra.

— o — o —

Def. (Operatore simmetrico) Sia H uno sp. di Hilbert
 Un operatore $f: H \rightarrow H$ si dice simmetrico se

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall (v, w) \in H^2$$

Moralmente: f inagira nei prodotti scalari

Esercizio Se $f: H \rightarrow H$ è simmetrico, allora è lineare

Verifica con la somma:

$$\begin{aligned}
 \langle f(v_1 + v_2), w \rangle &= \langle v_1 + v_2, f(w) \rangle = \langle v_1, f(w) \rangle + \langle v_2, f(w) \rangle \\
 &= \langle f(v_1), w \rangle + \langle f(v_2), w \rangle \\
 &= \langle f(v_1) + f(v_2), w \rangle
 \end{aligned}$$

Questo dice che

$$\langle f(v_1 + v_2) - f(v_1) - f(v_2), w \rangle = 0 \quad \forall w \in H$$

L'unico vettore $\perp$ a tutto è quello nullo.

— o — o —

Prop. 2 (Lineare + cpt. + simm $\Rightarrow$ continuo WS)

Sia H Hilbert e sia $f: H \rightarrow H$. Supponiamo

(i) f lineare

(ii) f compatto

(iii) f simmetrico

Allora f è continuo weak-strong, cioè (se $\{x_n\}$ è limitata)

un giorno seguirà
dalla conv. debole
 $\uparrow$

$x_n \rightarrow x_\infty$ debde in $H \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_\infty)$ forte in H .

Dim. Ci siamo quasi, perché la compattezza assicura che $\{f(x_n)\}$ ammette s.succ. che conv. forte.

Il problema è che deve convergere tutta.

Per ogni $w \in H$ vale

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f(x_n), w \rangle &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, f(w) \rangle \\ &\quad \uparrow \text{sim.} \\ &= \langle x_\infty, f(w) \rangle \\ &\quad \uparrow \text{conv. debole} \\ &= \langle f(x_\infty), w \rangle \\ &\quad \uparrow \text{sim.} \end{aligned}$$

Ora, per il lemma della sotto-sotto, ci basta dimostrare che ogni $\{f(x_{n_k})\}$ ha una sotto-sotto

$$f(x_{n_{k_j}}) \rightarrow f(x_\infty) \quad (\text{sempre lui})$$

Data $\{f(x_{n_k})\}$ per compattezza questa ha

$$f(x_{n_{k_j}}) \rightarrow y_\infty$$

Dalla relazione precedente segue che $\langle y_\infty, w \rangle = \langle f(x_\infty), w \rangle$
per ogni $w \in H$ e quindi $y_\infty = f(x_\infty)$.

— o — o —

QUOZIENTE DI RAYLEIGH

Def. Sia H uno sp. di Hilbert e sia $A: H \rightarrow H$.

Poniamo

$$q(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}$$

$$\forall x \in H \setminus \{0\}$$

quoziente di Rayleigh

Teorema (Caratterizzazione variazionale degli autovalori)

Sia H Hilbert, sia $A: H \rightarrow H$ lineare + compatto + simm.

Sia $V \subseteq H$ un s.sp. vettoriale $V \neq \{0\}$ che sia A -invariante, cioè $Av \in V$ per ogni $v \in V$.
è chiuso

Allora valgono i seguenti fatti.

(1) Esiste

$$\lambda_0 := \max \{ |q(v)| : v \in V \setminus \{0\} \}$$

e si può caratterizzare come

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \max \{ |\langle Av, v \rangle| : v \in V, \|v\| = 1 \} \\ &= \max \{ \quad \quad \quad \|v\| \leq 1 \} \end{aligned}$$

(2) Se $v_0 \in V$ soddisfa $|q(v_0)| = \lambda_0$ (cioè è un p.to di max) allora

$$Av_0 = \underbrace{q(v_0)}_{= \lambda_0} v_0$$

cioè $q(v_0)$ è autovalore e v_0 è corrispondente autovettore.

Oss. Non stiamo dicendo che $q(v)$ ammette max/min (uno dei 2 può non avercelo, ma $|q(v)|$ ha max).

Dim. Ci sono tantissimi vettori ciechi.

Step 1 $q(v)$ è 0-omogeneo, quindi costante sulle rette che escono dall'origine, quindi

$$\sup \{ |q(v)| : v \in V \setminus \{0\} \} = \sup \{ |q(v)| : v \in V \text{ e } \|v\| = 1 \}$$

$$= \sup \{ |\langle Av, v \rangle| : v \in V, \|v\| = 1 \}$$

$$\leq \sup \{ |\langle Av, v \rangle| : v \in V, \|v\| \leq 1 \}.$$

↑ sup su + roba

Step 2 L'ultima è una uguaglianza. Infatti, se $\|v_0\| < 1$, allora

$$w_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$$

soddisfa

$$|\langle Aw_0, w_0 \rangle| = \frac{1}{\|v_0\|^2} |\langle Av_0, v_0 \rangle| > |\langle Av_0, v_0 \rangle|$$

e inoltre $\|w_0\| = 1$, quindi è un competitor migliore.
(Dimenticare il caso $\|v_0\| = 0$)

Step 3 L'ultimo sup è un max ed i pti di max hanno norma 1 (tranne nel caso banale in cui $q(v) \equiv 0$ in V)

Sia $\{v_m\}$ una successione supizzante. È limitata, quindi ammette s.succ. (che non rinomino) che conv. debolmente

$$v_m \rightharpoonup v_\infty$$

Allora

- $\|v_\infty\| \leq 1$ (sci della norma)
- $v_\infty \in V$ (chiuso forte + convesso $\Rightarrow$ chiuso debole)

Claim $\langle Av_n, v_n \rangle \rightarrow \langle Av_\infty, v_\infty \rangle$

Infatti $Av_n \rightarrow Av_\infty$ (per continuità WS) e una forte + una debole permettono di passare al limite nel prod. scalare.

Questo dim. che esiste max. Per lo step 2 i pti di max stanno sul bordo.

Step 4 Cosa risolve un pto di max v_0 ?

Sappiamo che v_0 è pto di max o min per $q(v)$ senza valore assoluto

Per ogni $v \in V$ considero

$$\varphi(t) := q(v_0 + tv) = \frac{\langle A(v_0 + tv), v_0 + tv \rangle}{\|v_0 + tv\|^2}$$

$$\text{simul. } \nearrow = \frac{\langle Av_0, v_0 \rangle + 2t \langle Av_0, v \rangle + t^2 \langle Av, v \rangle}{\|v_0\|^2 + 2t \langle v_0, v \rangle + t^2 \|v\|^2}$$

$$0 = \varphi'(0) = \frac{2 \langle Av_0, v \rangle \|v_0\|^2 - 2 \langle v_0, v \rangle \langle Av_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^4}$$

cioè

$$\langle Av_0, v \rangle \|v_0\|^2 - \langle Av_0, v_0 \rangle \langle v_0, v \rangle = 0$$

$$\left\langle Av_0 - \frac{\langle Av_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0, v \right\rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

$\in V$ perchè V è A -invariante

Quindi

$$Av_0 - \boxed{\frac{\langle Av_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0} = 0$$

$q(v_0)$

— 0 — 0 —