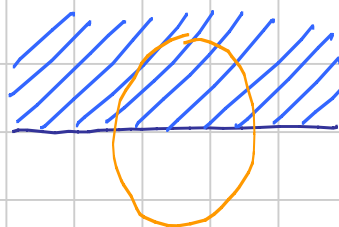


Regolarità fino al bordoCaso modello $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$ $f \in L^2(\mathbb{R}_+^d)$ $\uparrow$ DBCAssumiamo $\Delta u = f$ in senso debole in $\mathbb{R}_+^d$.Allora $u \in H^2(\mathbb{R}_+^d)$ con stima $\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \leq d \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}$

— o — o —

Dim stima a priori (assumendo tutto C^∞ e nullo fuori da un compatto di $\mathbb{R}^d$)Per $i = 1, \dots, d-1$ lavoro come sempre, cioèuso $\varphi = u x_i x_i$ ottenendo

$$\|D u_{x_i}\| \leq \|f\|$$

Questo mi stima tutte le derivate seconde tranne $u_{x_d x_d}$.Posso usare quella φ ? Posso permettermi $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ o per approssimazione $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$.Sì! Visto che $i \leq d-1$, sto facendo la derivata 2^a in direzione tangenziale all'iperpiano, quindi è la derivata seconda della funzione nulla!!Guadagnare $u_{x_d x_d}$ è banale!! Infatti

$$u_{x_d x_d} = \Delta u - \sum_{i=1}^{d-1} u_{x_i x_i} \in L^2 \quad \text{☺}$$

— o — o —

Come si rende rigoroso? Per $i = 1, \dots, d-1$ uso i rapporti incrementali come sempre, che stanno su $H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$.

Per conquistare l'ultima derivata non posso usare il Laplaciano. Per ipotesi

$$-\int_{\mathbb{R}_+^d} \langle Du, D\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^d} f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{d-1} \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial x_d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} \\ & = + \sum_{i=1}^{d-1} \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \varphi \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto

$$-\int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial x_d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} dx = \int_{\mathbb{R}_+^d} f \varphi - \int_{\mathbb{R}_+^d} \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \varphi$$

Questo ci dice che

$\frac{\partial u}{\partial x_d}$ ammette derivata debole in direzione x_d
data dalla formula che ci si aspetta.

Caso generale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$

Supponiamo che

(i) $\partial\Omega$ compatto e di classe C^2

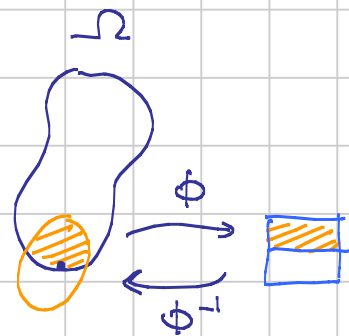
(ii) $\Delta u = f$ in Ω in senso debole.

Allora $u \in H^2(\Omega)$ e vale la stima

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{1,2,\Omega} \}$$

Stesso discorso vale per $\operatorname{div}(\hat{A}(x) Du) = f$ con $\hat{A}(x) \in C^1$.

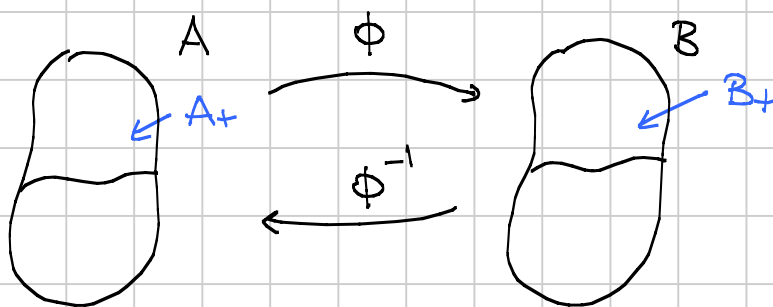
Dim. Con la solita partizione dell'unità scrivo u come somma di funzioni u_i che vivono in un aperto $\Omega \cap U_i$ che viene mappato nel cubo standard da una ϕ di classe C^2 .



Domanda generale: come si trasportano le equazioni mediante diffeomorfismi.

Contesto generale

- ϕ invertibile
- ϕ di classe C^2
- J_ϕ e $J_{\phi^{-1}}$ limitati su A e B rispettivamente
- $\phi: A \rightarrow B$, $\phi: A^+ \rightarrow B^+$, $\phi: \text{confine} \rightarrow \text{confine}$



u risolve $\operatorname{div}(\hat{A}(x) Du) = f$ in A

Pongo $v(y) = u(\phi^{-1}(y))$. Domanda: cosa risolve $v(y)$?

Definiamo v , $\hat{B}$, e g in B in modo tale che

$$v(\phi(x)) = u(x)$$

$$g(\phi(x)) = \frac{f(x)}{|\operatorname{Det} J_\phi(x)|}$$

$$\hat{B}(\phi(x)) = \frac{J_\phi(x) \hat{A}(x) [J_\phi(x)]^t}{|\operatorname{Det} J_\phi(x)|}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{riga}}}{Du(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{riga}}}{Dv(\phi(x))} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice}}}{J_\phi(x)}$$

Vomei u, g e $\hat{B}$ definite in B , quindi in risulta sto ponendo

$$u(y) := u(\phi^{-1}(y))$$

$$g(y) := \frac{f(\phi^{-1}(y))}{|\text{Det } J_\phi(\phi^{-1}(y))|}$$

$$\hat{B}(y) := \dots$$

Claim: u risolve in senso debole $\text{div}(\hat{B}(y) Du) = g$
in B .

Dim Ipotesi $-\int_A \langle \hat{A}(x) Du(x), D\varphi(x) \rangle dx = \int_A f(x) \varphi(x) dx$

Tesi:

$$-\int_B \langle \hat{B}(y) Du(y), D\psi(y) \rangle dy = \int_B g(y) \psi(y) dy$$

dove $\varphi \in C_c^\infty(A)$ e $\psi \in C_c^\infty(B)$

Uso l'ipotesi con $\varphi(x) := \psi(\phi(x))$ $D\varphi(x) = D\psi(\phi(x)) J_\phi(x)$

Ora cambiamo variabile negli integrali

$$\text{tesi} \quad \text{RHS} = \int_B g(y) \psi(y) dy = \int_A g(\phi(x)) \psi(\phi(x)) |\text{Det } J_\phi(x)| dx$$

$y = \phi(x)$

$$= \int_A f(x) \varphi(x) dx = \text{RHS (ipotesi)} \quad \text{☺}$$

$$- \text{LHS (tesi)} = \int_B \langle \hat{B}(y) Dv(y), D\psi(y) \rangle dy$$

$$= \int_B \underbrace{Dv(y)}_{\text{riga}} \underbrace{\hat{B}(y)}_{\text{matrice}} \underbrace{[D\psi(y)]^t}_{\text{riga trasposta}} dy$$

$$= \int_A Dv(\phi(x)) \hat{B}(\phi(x)) [D\psi(\phi(x))]^t |\text{Det } J_\phi(x)| dx$$

$$= \int_A \underbrace{Dv(\phi(x)) J_\phi(x)}_{Du(x)} \hat{A}(x) \underbrace{[J_\phi(x)]^t [D\psi(\phi(x))]^t}_{[D\psi(\phi(x)) J_\phi(x)]^t = [D\psi(x)]^t} dx$$

$$= \int_A Du(x) \hat{A}(x) [D\psi(x)]^t dx = -\text{LHS (ipotesi)} \quad \text{☺}$$

Oss: se $\psi \in C_c^\infty(B^+)$, allora $\psi \in C_c^2(A^+)$, ma questo è sufficiente per il conto

Oss. Gli integrali sono in realtà su A_+ e B_+ .

Oss. Dove ho usato $\phi \in C^2$? Mi serve $\hat{B} \in C^1$ e questo richiede $\phi \in C^2$.

Poi serve che $v \in H^2 \Rightarrow u \in H^2$, e anche qui serve.

Oss. Serve $\hat{B}$ ellittica se $\hat{A}$ è ellittica.

Esercizio di geometria 1: se A è definita positiva e M è invertibile, allora
 $MA M^t$
 è definita positiva.