

Def. (Rapporto incrementale - Derivata discreta)

Siano $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\varepsilon \neq 0$ numero reale
Poniamo

$$D_\alpha^\varepsilon u(x) := \frac{u(x + \varepsilon \alpha) - u(x)}{\varepsilon |\alpha|}$$

Se $\alpha = e_i$ (i -esimo vettore base canonica) lo chiamiamo $D_{x_i}^\varepsilon u$

Se u è definita in aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, allora $D_\alpha^\varepsilon u$ è ben definita in $\Omega' \subset \subset \Omega$ quando $|\varepsilon|$ è piccolo.

Oss. (Proprietà facili di D_α^ε)

- È lineare in u (da dove a dove?)
- Conserva la regolarità, cioè $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, allora $D_\alpha^\varepsilon u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$
- Commuta con le derivate deboli, cioè

$$D^\beta (D_\alpha^\varepsilon u) = D_\alpha^\varepsilon (D^\beta u) \quad \text{per ogni multiindice } \beta$$

- Vale una specie di regola per il prodotto

$$D_\alpha^\varepsilon (uv)(x) = u(x) D_\alpha^\varepsilon v(x) + \underset{\uparrow}{v(x + \varepsilon \alpha)} \underset{\uparrow}{D_\alpha^\varepsilon u(x)}$$

(Aggiungo e tolgo un termine misto)

- Vale una specie di chain-rule: se $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$D_\alpha^\varepsilon [\phi \circ u](x) = \phi'(\xi) D_\alpha^\varepsilon u(x)$$

$\uparrow$
p.to compreso tra $u(x)$ e $u(x + \varepsilon \alpha)$

Proposizione Stesso setting di sopra

(1) Per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$ vale se $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^d)$

$$\|D_{x_i}^\varepsilon u\|_{L^p} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

(2) Vale una specie di integrazione per parti

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x) D_\alpha^\varepsilon \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} D_\alpha^{-\varepsilon} u(x) \cdot \varphi(x) dx$$

per tutte le u e φ per cui hanno senso gli integrali,
ad esempio

• $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

• $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ (o esponenti coniugati)

Dim. (1) Solito conto! Assumiamo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e allora

$$|u(x + \varepsilon e_i) - u(x)| = |\psi(1) - \psi(0)| \quad \psi(t) := u(x + t\varepsilon e_i)$$

$$\leq \int_0^1 |\psi'(t)| dt$$

$$\psi'(t) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t\varepsilon e_i) \cdot \varepsilon$$

$$= |\varepsilon| \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t\varepsilon e_i) \right| dt$$

$\frac{1}{p}$ $\frac{1}{p'}$

$$\leq |\varepsilon| \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t\varepsilon e_i) \right|^p dt \right\}^{1/p} \cdot 1$$

Divido per ε ed elevo alla p e integro

$$\int_{\mathbb{R}^d} |D_{x_i}^\varepsilon u(x)|^p dx \leq \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\underbrace{x + t\varepsilon e_i}_y) \right|^p dx = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p$$

Fubini-Tonelli $dx = dy$

(2) Fare il conto!

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x) D_\alpha^\varepsilon \varphi(x) dx = \frac{1}{\varepsilon|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \varphi(\overbrace{x+\varepsilon\alpha}^y) dx \\ - \frac{1}{\varepsilon|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \varphi(x) dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(y-\varepsilon\alpha) \varphi(y) dy - \frac{1}{\varepsilon|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \varphi(y) dy$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \frac{u(y-\varepsilon\alpha) - u(y)}{-\varepsilon|\alpha|} dy$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) D_\alpha^{-\varepsilon} u(y) dy.$$

— o — o —

nei casi estremi qualcosa resta vero
↓ ↓ ma non tutto

Teorema Sia $d \geq 1$ intero, $p \in (1, +\infty)$.

Allora sono equivalenti i seguenti:

(1) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

(2) $D_{x_i}^\varepsilon u \rightarrow$ qualcosa in $L^p(\mathbb{R}^d)$ forte $\forall i = 1, \dots, d$
 $\uparrow$ sarà $\frac{\partial u}{\partial x_i}$

(3) $D_{x_i}^\varepsilon u \rightarrow$ qualcosa in $L^p(\mathbb{R}^d)$ debole $\forall i = 1, \dots, d$

(4) $\|D_{x_i}^\varepsilon u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ sono limitati, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \boxed{\forall \varepsilon \neq 0} \quad \forall i \in \{1, \dots, d\} \quad \|D_{x_i}^\varepsilon u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq M.$$

Dim. $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ seguono da fatti standard

(1) $\Rightarrow$ (2) : esercizio interessante (imitare dim. conv. conclusioni)

(4) $\Rightarrow$ (1). Dalla limitatezza + compattezza debole palle ($p > 1$)
segue che esiste $\varepsilon_n \rightarrow 0$ t.c.

$$D_{x_i}^{\varepsilon_m} u \rightarrow v \quad \text{debile } L^p(\mathbb{R}^d)$$

Claim: v è deriv. debole in direzione e_i

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_{x_i}^{\varepsilon_n} u(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} u(x) D_{x_i}^{-\varepsilon_n} \varphi(x) dx$$

$\downarrow$ conv. debole $\downarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{pure uniform.} \\ \text{de } \varepsilon_n \end{array} \right.$

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Questo dice che σ è la deriv. debole

Teorema (Ripetibilità interna, caso base)

Siano $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tali che $\Delta u = f$ in senso debole, cioè

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} f\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Allora $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ e

$$\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq d \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Dim. Step 1 La relazione di sd. debole vale $\forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$
(ogni $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ la approx deluxe con $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$).

Step 2 Uso $\varphi(x) = D_{x_i}^{-\varepsilon} D_{x_i}^\varepsilon u(x)$ che sta in $H^1(\mathbb{R}^d)$

$$\text{RHS} = \int \varphi(x) D_{x_i}^{-\varepsilon} D_{x_i}^\varepsilon u(x) dx$$

$$\leq \|\varphi\| \cdot \|D_{x_i}^{-\varepsilon} D_{x_i}^\varepsilon u(x)\|$$

$$\leq \|\varphi\| \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x_i}^\varepsilon u(x) \right\|$$

$$\leq \|\varphi\| \cdot \| \underbrace{D D_{x_i}^\varepsilon}_{\text{}} u(x) \|$$

$$= \|\varphi\| \cdot \|D_{x_i}^\varepsilon (Du(x))\|$$

$$\text{LHS} = - \int \langle Du, \underbrace{D D_{x_i}^{-\varepsilon} D_{x_i}^\varepsilon}_{\text{}} u \rangle dx$$

$$= - \int \langle \underbrace{Du(x)}_{\text{}}, D_{x_i}^{-\varepsilon} D D_{x_i}^\varepsilon u(x) \rangle dx$$

$$= \int \langle \underbrace{D_{x_i}^\varepsilon Du(x)}_{\text{}}, D D_{x_i}^\varepsilon u(x) \rangle dx$$

$$= \|D_{x_i}^\varepsilon Du\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

Mettendo insieme troviamo

$$\|D_{x_i}^\varepsilon Du\| \leq \|\varphi\|$$

Questo per caratterizzazione ci dice che tutte le derivate seconde
con x_i dentro stanno in L^2 . In d passaggi concludo

— o — o —

Oss. La dim. del caso $\operatorname{div}(A(x) Du) = f$ è la stessa (ad un certo punto serve la chain rule per i rapporti incrementali).

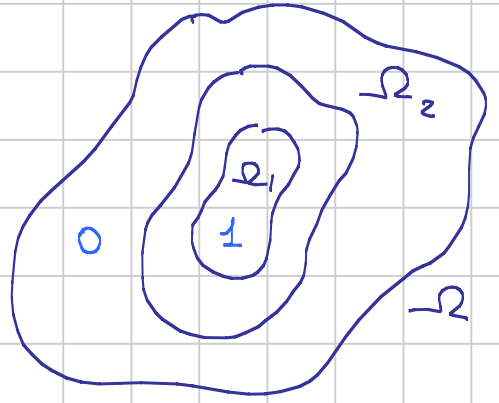
Localizzazione

Se u risolve $\Delta u = f$ e

$$v(x) = u(x) \cdot \psi(x)$$

cosa risolve $v(x)$?

Se è tutto regolare



$$\Delta v = \underbrace{\Delta u}_{=f} \cdot \psi + 2 \langle Du, D\psi \rangle + u \Delta \psi =: g$$

Domanda: vale lo stesso a livello di soluz. deboli?

$$\text{Tesi: } - \int_{\Omega} \langle Dv, D\varphi \rangle = \int_{\Omega} f \psi \varphi + \int_{\Omega} 2 \langle Du, D\psi \rangle \varphi + \int_{\Omega} u \Delta \psi \varphi$$

$$\text{Ipotesi: } - \int_{\Omega} \langle Du, D\varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi$$

Uso ipotesi con $\varphi \psi$ al posto di φ

$$\int_{\Omega} f \varphi \psi = - \int_{\Omega} \langle Du, D(\varphi \psi) \rangle$$

$$= - \int_{\Omega} \langle Du, \varphi D\psi \rangle - \int_{\Omega} \langle Du, \psi D\varphi \rangle$$

$$= - \int_{\Omega} \langle Du, D\psi \rangle \varphi - \int_{\Omega} \langle \psi Du, D\varphi \rangle$$

$\stackrel{\text{"}}{=} D(\psi u) - u D\psi$

$$= - \int_{\Omega} \langle Du, D\psi \rangle \varphi - \int_{\Omega} \langle D(\psi u), D\varphi \rangle + \int_{\Omega} \langle u D\psi, D\varphi \rangle$$

Per concludere $\int_{\Omega} \langle u D\psi, D\varphi \rangle = - \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}(u D\psi)$

$\uparrow$ produce termini mancanti