

Teorema (Regolarità $L^2(\Omega)$ interna)

Consideriamo l'eq.

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f \quad \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$$

Supponiamo che

(i) $A(x)$ unif. ellittica con costante ν

(ii) $A \in C^1(\Omega)$

(iii) $f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$

(iv) $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sia soluzione debole, cioè

$$-\int_{\Omega} \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Allora $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e per ogni $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$ vale la stima

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C(\nu, \Omega_1, \Omega_2) \{ \|f\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u\|_{1,2,\Omega_2} \}$$

Teorema (Regolarità L^2 fino al bordo)

Stessa cosa senza i loc, ma assumendo anche regolarità di $\partial\Omega$ (ad esempio compatto + classe C^2)

Oss. I teoremi valgono abbastanza facilmente in versione iterata, cioè

$$f \in H^k_{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow u \in H^{k+2}_{\text{loc}}(\Omega)$$

con stima come uno si aspetta.

Dimostrazioni ABUSIVE del teorema di reg. interna

Parola chiave: STIME A PRIORI: assumiamo che la soluzione esista e sia C^∞ e dimostriamo delle stime "centro natura", cioè stime le derivate con le funzioni.

Caso 1 $d=2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $A = \text{Id}$

$$u_{xx} + u_{yy} = f$$

Assumiamo anche $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

La form. debole diventa

$$-\int_{\mathbb{R}^2} u_x \varphi_x + u_y \varphi_y = \int_{\mathbb{R}^2} f \varphi$$

Uso $\varphi = u_{xx}$ (posso perché è tutto C^∞)

$$-\int_{\mathbb{R}^2} u_x u_{xxx} + u_y u_{yxx} = \int_{\mathbb{R}^2} f u_{xx}$$

Ora

$$\text{RHS} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|u_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Al LHS integro per parti

$$\text{LHS} = \int_{\mathbb{R}^2} u_{xx}^2 + u_{xy}^2$$

Mettendoli insieme: (tutte le norme sono in $L^2(\mathbb{R}^2)$)

$$\begin{aligned} \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xy}\|^2 &= \text{LHS} = \text{RHS} \leq \|f\| \cdot \|u_{xx}\| \\ &\leq \|f\| \left\{ \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xy}\|^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Se semplifico ottengo che

$$\{ \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xy}\|^2 \}^{1/2} \leq \|f\|$$

Se partivo con $\varphi = u_{yy}$ controllavo pure $\|u_{yy}\|^2$.
 — o — o —

Caso 2 $A = \text{Id}$, d generico, u e $f \in C_c^\infty$

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi f$$

Uso $\varphi = u_{x_i x_i}$

$$\text{RHS} = \int_{\mathbb{R}^d} u_{x_i x_i} f \leq \|u_{x_i x_i}\| \cdot \|f\|$$

$$\text{LHS} = -\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du, \underbrace{Du_{x_i x_i}}_{\substack{\uparrow \\ \text{scrivere tutto con gli indici} \\ \text{per vedere cosa sta succedendo}}} \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} \langle Du_{x_i}, Du_{x_i} \rangle dx$$

scrivere tutto con gli indici
per vedere cosa sta succedendo

Mettendo insieme:

$$\|Du_{x_i}\|^2 = \text{LHS} = \text{RHS} \leq \|f\| \cdot \|u_{x_i x_i}\| \leq \|f\| \cdot \|Du_{x_i}\|$$

Conclusione come prima.

— o — o —

Caso 3 In $\mathbb{R}^d$, tutto C_c^∞ , con matrice $A(x)$ generica

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x) Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \varphi dx$$

Come prima $\varphi = u_{x_i x_i}$

$$\text{RHS} \leq \|f\| \cdot \|u_{x_i x_i}\| \leq \|f\| \cdot \|Du_{x_i}\|$$

$$\text{LHS} = - \int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x) \underbrace{Du}_{\text{indici}}, Du_{x_i x_i} \rangle dx$$

(per sicurezza scrivere con indici)

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \langle D_{x_i} (A(x) Du), Du_{x_i} \rangle dx$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \langle A_{x_i}(x) Du, Du_{x_i} \rangle dx}_{\geq -\|A(x)\|_C \|Du\| \cdot \|Du_{x_i}\|} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x) Du_{x_i}, Du_{x_i} \rangle dx}_{\geq \nu \|Du_{x_i}\|^2 \text{ (ellitticit\`a)}}$$

$$\geq -\|A(x)\|_C \|Du\| \cdot \|Du_{x_i}\|$$

$$\geq \nu \|Du_{x_i}\|^2 \text{ (ellitticit\`a)}$$

Mettendo insieme:

$$\nu \|Du_{x_i}\|^2 \leq \text{LHS} + \|A\|_C \|Du\| \cdot \|Du_{x_i}\|$$

$$\leq \text{RHS} + "$$

$$\leq \|f\| \cdot \|Du_{x_i}\| + \|A\|_C \|Du\| \cdot \|Du_{x_i}\|$$

Semplificando ho la tesi (poi faccio variare $i = 1, \dots, d$)

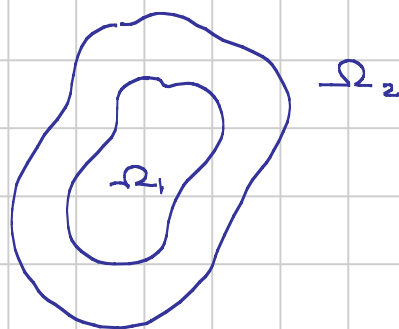
Caso 4 $\Omega = \mathbb{R}^d$, $A(x) \equiv \text{Id}$, u e f in C^∞ , ma senza supporto compatto

Prendiamo $\Omega_1 \subset \subset \Omega_2 \subset \subset \mathbb{R}^d$
e scegliamo una ψ di classe C^∞
tale che

$$\psi \equiv 1 \quad \text{in } \Omega_1$$

$$\psi \equiv 0 \quad \text{fuori da } \Omega_2$$

$$0 \leq \psi \leq 1 \quad \text{in mezzo}$$



Poniamo $v(x) = \psi(x) \cdot u(x)$
e vediamo cosa risolve

$$\Delta v(x) = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplaciano del} \\ \text{prodotto}}}{\Delta \psi \cdot u + \psi \cdot \underbrace{\Delta u}_f} + 2 \langle D\psi, Du \rangle$$

$$=: g$$

Ora v e g hanno supporto compatto in $\mathbb{R}^d$ e

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2(\Omega_2)} &\leq \text{cost} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega_2)} + 1 \cdot \|f\|_{L^2(\Omega_2)} + \text{cost} \|Du\|_{L^2(\Omega_2)} \\ &\leq \text{cost} \{ \|f\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u\|_{1,2,\Omega_2} \} \end{aligned}$$

Dai risultati precedenti sappiamo che

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega_1)} &\overset{\substack{\uparrow \\ u \equiv v \text{ in } \Omega_1}}{=} \|D^2 v\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq \|D^2 v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tipo } d \text{ o qualcosa di simile}}}{\text{cost}} \|g\|_{L^2(\overset{\substack{\uparrow \\ \Omega_2}}{\mathbb{R}^d})} \\ &\leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dipende anche da } \Omega_1 \text{ e } \Omega_2}}{\text{cost}} \{ \|f\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u\|_{1,2,\Omega_2} \} \end{aligned}$$

Oss. L'ultimo caso funziona ugualmente con Ω generico,
può di prendere $\Omega_1 \subset \subset \Omega_2 \subset \subset \Omega$.