

$$F(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \cos u \right) dx$$

$\nwarrow$ Palla

$$F(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{u^{2020}}{2020} \right) dx$$

$\nwarrow$ Palla

Metodo diretto: esiste il minimo di $F(u)$ in $H^1(\Omega)$ con DBC.

Detto u_0 un p.to di min., cosa risolve u_0 ?

ELE DEBOLE $\varphi(t) := F(u_0 + tv)$ con $v \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\varphi(t) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u_0|^2 + \frac{1}{2} t^2 |\nabla v|^2 + t \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle - \cos(u_0 + tv) \right) dx$$

e simile nel 2° caso

$$\varphi'(t) = t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle + \int_{\Omega} \sin(u_0 + tv) v \, dx$$

Nel 1° caso è gratis una dominazione sulla presunta derivata

$$\varphi'(t) = \text{stessi primi due termini} + \int_{\Omega} (u_0 + tv)^{2019} v \, dx$$

Per poter derivare serve dominazione sull'ultimo

$$|u_0 + tv|^{2019} |v| \leq \text{cost} \left\{ |u_0|^{2019} + |t|^{2019} |v|^{2019} \right\}$$

$\uparrow$ No pbm $\uparrow$ $\uparrow$ No PBM

poiché $F(u_0) < +\infty$, allora

$$u_0 \in L^{2020} \Rightarrow u_0 \in L^{2019}$$

Imponendo $\varphi'(0) = 0$ troviamo

$$-\int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle \, dx = \int_{\Omega} \sin(u_0) v \, dx$$

$$-\int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle \, dx = \int_{\Omega} u_0^{2019} v \, dx$$

1ª forma
integrale
di ELE

REGOLARITÀ ELLITTICA

1] Eq. Ellittiche lineari

1.1] Eq. Ell. lineari basic

- Equazione

$$\Delta u = f$$

- Funzionale $L(x, s, p) := \frac{1}{2} |p|^2 + s f(x)$

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + u f(x)$$

- Formulazione debole

$$-\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

1.2] Eq. Ell. lineari con coeff.

- Equazione $\operatorname{div}(A(x) \nabla u) = f$

dove $A: \Omega \rightarrow \text{Matrici } d \times d \text{ simmetriche}$

- Funzionale $L(x, s, p) := \frac{1}{2} \langle A(x) p, p \rangle + s f(x)$
forma quadratica in p con
coeff. dip. da x

$$F(u) = \int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u, \nabla u \rangle + \int_{\Omega} f(x) u dx$$

- Formulazione debole

$$-\int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Def. L'equazione si dice (UNIFORMEMENTE) ELLITTICA se

$$\exists \nu > 0 \quad \text{t.c.} \quad A(x) \geq \nu \text{Id} \quad \forall x \in \Omega$$

cioè $\langle A(x)p, p \rangle \geq \nu |p|^2$

Oss. Sotto ipotesi di ellitticità

$$\int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle dx \leq M \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \frac{M}{\nu}$$

Tocchiamo con mano:

$$\text{div}(A(x) \nabla u) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^d A_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

$$\langle A(x) \nabla u, \nabla \varphi \rangle = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

1.3 Eq. ell. lineare supergenerale

$L(x, s, p) = \text{pol. di 2° grado nelle variabili } s \text{ e } p \text{ con coeff. che dipendono da } x$

2 Equazioni Ellittiche SEMILINEARI

• Equazione

$$\begin{aligned} \text{div}(A(x) \nabla u) &= g(x, u) \\ \Delta u &= g(x, u) \end{aligned}$$

Moralmente: lineare nella parte di derivata, non lineare nella parte di funzione

primitiva in s
↑ di $g(x, s)$

• Funzionale $L(x, s, p) = \frac{1}{2} \langle A(x)p, p \rangle + G(x, s)$

• Formulazione debole

$$-\int \langle A(x) \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = \int g(x, u) \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

3) Eq. Ellittiche QUASI LINEARI

• Equazione $\operatorname{div} (A(x, u, \nabla u)) = g(x, u)$

$\uparrow \uparrow \quad \uparrow \uparrow$

• Funzionale $L(x, s, p) = \varphi(p) + G(x, s)$

$\uparrow$ funzione convessa di p

— o — o —

Regolarità ellittica per equazioni LINEARI

$$\Delta u = f$$

$$\operatorname{div} (A(x) \nabla u) = f$$

Due tipi di risultati (per soluzioni deboli)

• Regolarità interna

$$f \in \text{Spazio}_{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow \boxed{D^2 u} \in \text{Spazio}_{\text{loc}}(\Omega)$$

Matrice Hessiana di u

• Regolarità fino al bordo

$$f \in \text{Spazio}(\Omega) \Rightarrow D^2 u \in \text{Spazio}(\Omega)$$

↑ stesso spazio

Oss. Sto assumendo che Δu è qualche parte e si ottiene che tutte le deriv. seconde SEPARATAMENTE stanno nello stesso spazio, comprese le miste

Ultra-brutal: se controllo $x^2 + y^2 + z^2$, controllo x^2, y^2, z^2 e anche xy, yz, zx

Risultati tipici

$$\begin{aligned} f &\in L^2_{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow D^2 u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega), \text{ cioè } u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega) \\ f &\in L^2(\Omega) \Rightarrow D^2 u \in L^2(\Omega), \text{ cioè } u \in H^2(\Omega) \end{aligned}$$

TEORIA
 L^2

$$f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow D^2 u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \quad (u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega))$$

stessa senta loc

TEORIA
 L^p

($1 < p < +\infty$)

$$\begin{aligned} f &\in C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow D^2 u \in C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega) \\ &\text{cioè } u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega) \end{aligned}$$

stessi senta loc

TEORIA DI
SCHAUDER

$\alpha \in (0, 1)$
↑
escluso

Achtung! Altre implicazioni sono false!!

$$\left. \begin{aligned} f &\in L^1(\Omega) \not\Rightarrow D^2 u \in L^1(\Omega) \\ f &\in L^\infty(\Omega) \not\Rightarrow D^2 u \in L^\infty(\Omega) \\ f &\in C^0(\Omega) \not\Rightarrow D^2 u \in C^0(\Omega) \\ f &\in \text{Lip}(\Omega) \not\Rightarrow D^2 u \in \text{Lip}(\Omega) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Nemmeno con} \\ \text{i loc a} \\ \text{dx e/o sx} \end{array}$$

— o — o —

Back to esempi iniziali (da ora $Du = \nabla u$)

$$-\int_{\Omega} \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\Omega} \underbrace{\sin u}_{f \in L^2(\Omega)} \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\text{Teoria } L^2 \Rightarrow D^2 u \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$$

$$-\int_{\Omega} \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int_{\Omega} \boxed{u^{2019}} \varphi dx$$

↑
 $f \rightsquigarrow$ scritto così sta in $L^{\frac{2020}{2019}}(\Omega)$
quindi non in L^2 😞

Se DBC sono limitate, un argomento di truncamento ci dice che $f \in L^\infty(\Omega)$ e quindi $L^2(\Omega)$.

I risultati di regolarità valgono in versione iterata

$$f \in H^k(\Omega) \Rightarrow \mathcal{D}^2 u \in H^k(\Omega) \text{ cioè } u \in H^{k+2}(\Omega)$$

Qui tira aria di BOOTSTRAP

MAGARI

$$\sin u \in L^2 \Rightarrow u \in H^2 \xRightarrow{\text{MAGARI}} \sin u \in H^2 \Rightarrow u \in H^4 \Rightarrow \dots$$

ma quando sto in H^{tanto} inizio ad avere derivate vere, e quindi arrivo a C^∞ .

MAGARI !!!

$$\mathcal{D}(\sin u) = \cos u \cdot \mathcal{D}u$$

[Aggiunto dopo video: così è scritto male perché sembra un numero, ma invece è una matrice]
(vedi sotto)

$$\mathcal{D}^2(\sin u) = -\sin u \underbrace{|\mathcal{D}u|^2}_{\substack{\in L^2 \text{ se} \\ u \in W^{1,4}}} + \cos u \cdot \underbrace{\mathcal{D}^2 u}_{\in L^2 \text{ se } u \in H^2}$$

Buona notizia: in dim. $d \leq 4$ valgono le implicazioni

$$u \in H^2 \xRightarrow{\substack{\uparrow \uparrow \\ \text{immersioni}}} u \in W^{1,4} \Rightarrow \sin u \in H^2$$

[Aggiunto dopo video:

$$\frac{\partial^2(\sin u)}{\partial x_i \partial x_j} = -\sin u \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} + \cos u \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

La sostanza non cambia: serve $u \in H^2 \cap W^{1,4}$ affinché stia in L^2]