

**Dim PSW** (Senza passare per il metodo diretto fraume che  
Come sempre supponiamo  $u_\Omega = 0$ . Allora per  $p=q$ )

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, \Omega) \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

interpolazione ↗

$$\begin{aligned} &\leq C(p, q, \Omega) \{ \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \} \\ &\quad \uparrow \text{se } \Omega \text{ è decente} \quad \uparrow \text{si stima cd. sdo gradiente come fatto prima} \\ &\leq C(p, q, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

**Dim PSW** (Per assurdo con argomento di compattezza)

Supponiamo per assurdo che il famoso  $\inf$  sia  $= 1$ .

Allora esiste  $\{u_m\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$  tale che

$$(u_m)_\Omega = 0$$

$$\|u_m\|_{L^q(\Omega)} = 1$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{m}$$

↑  
o comunque  
tendendo a 0

Supponiamo  $p \leq q < p^*$  (per  $q = p^*$  ci sono problemi)  
Allora dalle ipotesi segue

$$\|u_m\|_{1,p,\Omega} \leq M$$

e quindi esiste  $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$  in  $L^q(\Omega)$  (qui serve  $q < p^*$  per il teo. di compattezza). Passando al limite abbiamo

$$(u_\infty)_\Omega = 0$$

$$\|u_\infty\|_{L^q(\Omega)} = 1$$

$$\nabla u_\infty \equiv 0$$

(Sappiamo che  $\nabla u_n \rightarrow 0$  forte in  $L^p(\Omega)$ , ma possiamo dire che  $\nabla u_\infty = \lim \nabla u_n$ ? Sì, basterebbe anche la sola convergenza debole di funzioni e gradienti)  
 Ma una tale  $u_\infty$  non può esistere in  $\Omega$  connesso.  
 — o — o —

Oss. La dimostrazione con il metodo diretto, nel caso  $p=q$ , non funziona nel caso  $p=1$ , mentre funziona la dim. per assurdo.

Dove non funziona? Avevamo ottenuto  $\|u_n\|_{1,p,\Omega} \leq M'$  da cui

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

Cosa posso dire di  $\nabla u_{n_k}$ ?

Mi servirebbe che, a meno di ulteriori s.succ.,  $\nabla u_{n_k} \rightarrow$  q.c. anche solo debolmente.

Argomento standard:  $\|\nabla u_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} \leq M'$ , quindi a meno di s.succ.

$$\nabla u_{n_k} \xrightarrow{L^p(\Omega)} v \quad (v \text{ ha } n \text{ componenti, e la comp. è comp. } \times \text{ comp.})$$

La compattezza debole delle palle vale solo per  $p > 1$ .  
 — o — o —

Approccio variazionale alle eq. alle derivate parziali

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  una palla. Vogliamo risolvere

$$\Delta u = \sin u$$

$$u|_{\partial\Omega} = \text{funzione data} \quad (\text{DBC})$$

$$\Delta u = u \quad \text{2019}$$

$$\text{DBC}$$

Formulazione variazionale: cerco funzionali la cui ELE sia l'eq. data

$$F(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \cos u \right) dx$$

$$F(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{u^{2020}}{2020} \right) dx$$

$$\text{ELE: } \operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) = L_s(x, u, \nabla u)$$

Uno risolve il problema di minimo

$$\min \{ F(u) : u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = \text{DBC} \}$$

Dove assume valori  $F(u)$ ?  $\rightarrow$  Nel primo caso reali

(in ogni caso  $+\infty$  è accettabile)

$\rightarrow$  Nel secondo dipende dalla dimensione, occorre vedere

se  $H^1$  si immerge in  $L^{2020}(\Omega)$

$$\Leftrightarrow 2020 < 2^* = \frac{2d}{d-2}$$

(disuguaglianza)

Oss. Che senso hanno le DBC? Si interpretano in termini di traccia, quindi devo essere sicuro che  $\text{DBC} \in \text{Tr}$

Uscita classica: uno prende  $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$  e impone una condizione del tipo

$$\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr} u_0$$

il che è equiv. a

$$u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

## Compattezza

$$F(u) \leq M$$

- $\Omega$  limitato è gratis
- $\|\nabla u\|_{L^2} \leq M'$  è quasi gratis.  
Basta avere stime del tipo

$$L(x, s, p) \geq A |p|^2 - B \quad \text{con } A > 0$$

- Servono stime su  $\|u_m\|$

[Aggiunto dopo video: nel secondo caso segue banalmente da  $\|u_m\|_{L^2} \leq \text{cost.} \|u_m\|_{W^{1,2}}$ ]

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \underbrace{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}}_{\text{limitata}} + \underbrace{\|u_m - u_0\|_{L^2(\Omega)}}_{\text{sta in } W^{1,2}_0(\Omega)}$$

$$\begin{aligned} & \text{(Poincaré)} \leq \text{cost} \|\nabla(u_m - u_0)\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \text{cost} (\|\nabla u_m\|_{L^2} + \|\nabla u_0\|_{L^2}) \\ & \leq M'' \end{aligned}$$

Alla fine esiste  $u_{m_k}$  tale che

$$u_{m_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad (\text{in realtà fino a } 2^* \text{ escluso})$$

$$\nabla u_{m_k} \rightarrow \nabla u_\infty \quad \text{debole } L^2(\Omega)$$

(ci sono due step: prima teo. di cpt. e faccio convergere le  $u_m$  poi estraggo di nuovo per far convergere debole i gradienti)

## Semicontinuità

- Sulla parte di gradiente è sci della norma risp. conv. debole

- Sulla parte di funzione

→ nel primo caso segue dalla conv. puntuale q.o. e dominata, dunque abbiamo

$$\int_{\Omega} \cos(u_n) dx \rightarrow \int_{\Omega} \cos(u_{\infty}) dx$$

(questo darebbe convergenza solo sulla s.succ. su cui si ha puntuale q.o., ma poi si conclude con il lemma della sotto-sotto)

→ nel secondo caso senza Fatou e si ottiene

$$\liminf \int u_n^{2020} \geq \int u_{\infty}^{2020}$$

(Basterebbe la debole e convergenza di  $x^{2020}$ ).

In alternativa:

- prendo la s.succ. in cui  $\liminf = \lim$
- estraggo a sua volta per avere puntuale q.o.
- uso Fatou

— o — o —

Oss. In fase di compattezza occorre dire che

$$\text{Tr } u_n \rightarrow \text{Tr } u_{\infty}$$

— o — o —