

Esempio $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per $p < +\infty$

Segue dall'approssimazione deluxe (prima approx. in cui creiamo il supporto compatto, poi approssimo questa con funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$).

Ci sono altri casi in cui vale?

Esempio $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $d=1$

No! In questo caso, almeno per $p > 1$, si ha

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \underline{u(0)=0}\}$$

i valori puntuali sono ben definiti e passano al limite per conv. unif., che segue da quella in $\|\cdot\|_{1,p}$ se $p > 1$.

Prop. $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ se $d \geq 2$ e $p \leq d$
(se $p > d$ c'è il discorso dei valori puntuali)

(In generale vale l'uguaglianza per $\mathbb{R}^d \setminus$ poca roba)

Dim. Data $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ la voglio approssimare con $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$.

Lo facciamo poco per volta.

Supponiamo ci venga dato $\varepsilon > 0$

Step 1 Esiste $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\|u - v\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$



Pongo $u_n(x) := u(x) \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ con φ come in figura

e per n abbastanza grande abbiamo

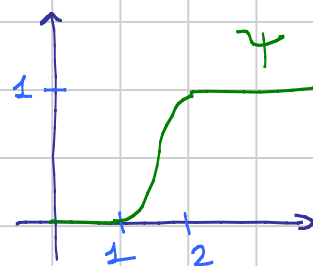
$$\|u - u_n\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{8} \varepsilon$$

Poi a sua volta approssiamo per convoluzione

Step 2 Data $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ esiste $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ tale che

$$\|v - w\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

Basta porre



$$v_n(x) := v(x) \psi(n|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

e dico che per n grande va bene.

$v_n(x) \rightarrow v(x)$ puntuale dominato, quindi

$$\|v_n - v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$$

$$D_{x_i} v_n(x) = \underbrace{D_{x_i} v(x) \psi(n|x|)}_{\downarrow} + v(x) n \psi'(n|x|) \underbrace{\frac{x_i}{|x|}}_{\leq 1}$$

$D_{x_i} v$ puntuale dominato
 $\leadsto$ ok come prima

Mi serve che l'altro termine $\rightarrow 0$

$$\int_{\substack{\mathbb{R}^d \\ \uparrow \\ B(0, \frac{2}{n})}} n^p \underbrace{|U(x)|^p}_{\leq C} \underbrace{(\psi'(n|x|))^p}_{\leq C} dx \leq n^p \text{meas}(B(0, \frac{2}{n})) = \text{cost.} \cdot \frac{1}{n^d}$$

Quindi $0 < \alpha < p < d$. (nota il caso $p = d$)
— o — o —

Esercizio della capacità

Siano dati $E \subset \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
 $\uparrow$ qualunque $\uparrow$ aperto

Sia $p \in [1, +\infty]$. Poniamo

$$\text{Cap}_p(E, \Omega) := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx : u \in C_c^\infty(\Omega) \right. \\ \left. u(x) \geq 1 \quad \forall x \in E \right\}$$

Ha a che fare con i condensatori di fisica.

Sembra naturale formulare debole in $W_0^{1,p}(\Omega)$, ma la condizione $u(x) \geq 1$ crea problemi (q.o. ? valori puntuali ?)

Caso speciale: $E = \text{p.to singolo } x_0$

e $\Omega = \text{palla}$

Esercizio Se $p > d$, allora $\inf = \min$ in $W_0^{1,p} > 0$

Metodo diretto standard. Form. debole ha senso in $W_0^{1,p}(\Omega)$ con valori puntuali.

Compattezza: stima sul gradiente $\Rightarrow$ stima sulla costante di Hölder $\Rightarrow$ Ascoli - Arzelà e conservazione del vincolo.

Per la stima sulla funzione uso stima Hölder + valori nulli al bordo.

SCI: praticamente ovvia (integrandi convergenti)

$\Rightarrow$ esiste il minimo in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

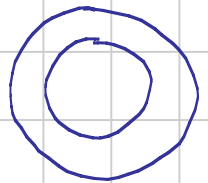
Questo non è 0 perché se lo fosse avremmo $\nabla u = 0$ q.o.,
e questo implica che u è loc. costante $\Rightarrow$ costante
e la costante dovrebbe essere $= 0$ al bordo e ≥ 1 in x_0 .

Subesercizio Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla u = 0$ (q.o.), possiamo
dire che u è loc. cost. (q.o.)

[SI!] Basta dim. che u è costante in ogni palla

Considero $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$

$$\begin{array}{ccccc} \nabla u_\varepsilon = \nabla u * \rho_\varepsilon & \text{nella palla + piccola} \\ = 0 & \text{"} & \text{"} & \text{"} & \end{array}$$

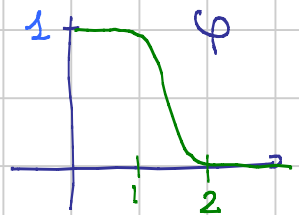


Quindi le u_ε sono costanti nella palla + piccola, e allora
convergono ad una costante.

— o — o —

Esercizio $\text{Cap}_p(\text{punto}, \text{palla}) = 0$ se $p < d$

Wlog punto = centro

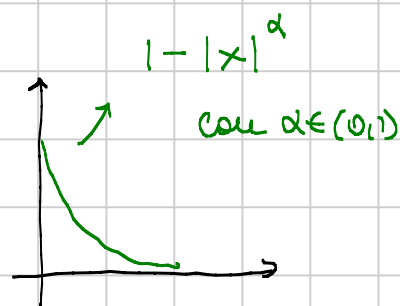


Come sempre pongo $u_n(x) := \varphi(n|x|)$

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u_n(x)|^p dx \leq \int_{\substack{B(0,1) \\ \uparrow \\ B(0, \frac{2}{n})}} n^p \underbrace{|\varphi'(n|x|)|^p}_{\leq \text{cost}} dx \sim \frac{n^p}{n^d} \quad \text{☺}$$

Esercizio Stessa cosa con $p = d$

Pongo $u_\alpha(x) := 1 - |x|^\alpha$



$$\int_{B(0,1)} |\nabla u_\alpha(x)|^p dx = \alpha^p \cdot \text{costante} \cdot \int_0^1 (r^{\alpha-1})^p \cdot r^{d-1} dr$$

↑
tutta la trigo
è qui

$$= \alpha^p \cdot \text{costante} \cdot \int_0^1 r^{p(\alpha-1) + d-1} dr$$

$$= \alpha^p \cdot \text{costante} \cdot \frac{1}{p\alpha} \cdot 1$$

$$= \alpha^{p-1} \cdot \text{costante} \cdot \frac{1}{p}$$

Se $d > 1$ e $\alpha \rightarrow 0$ si vede che l'inf. è 0.

Se vogliamo una succ. infittante C^∞ , basta approssimare, ad esempio per convoluzione. Occhio al valore puntuale

$u(0) \geq 1$ (sistemazione nel video).

— 0 — 0 —