

Spazi $W_0^{m,p}(\Omega)$

Già visto: $W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega)$

e si poteva definire come

- l'insieme delle $u \in L^p(\Omega)$ per cui esiste $\{u_n\} \subseteq C_1^{\infty,p}(\Omega)$ oppure $\{u_n\} \subseteq C^{m,p}(\Omega)$ tali che
 $\rightarrow u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$
 $\rightarrow D^\alpha u_n \rightarrow v_\alpha$ in $L^p(\Omega)$ (a posteriori $v_\alpha = D^\alpha u$) $\forall |\alpha| \leq m$.
- completamento astratto di $C^{\infty,p}(\Omega)$ o $C^{m,p}(\Omega)$ rispetto alla distanza indotta da $\|u\|_{m,p,\Omega}$.

non c'è il
spt. compatto

Def. Sia $d \geq 1$ intero, $m \geq 1$ intero, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty]$.

Si indica con $W_0^{m,p}(\Omega)$ lo spazio definito in uno dei seguenti 3 modi equivalenti.

- Completamento astratto di $C_c^\infty(\Omega)$ o $C_c^m(\Omega)$ rispetto alla solita full norm.
- L'insieme delle $u \in L^p(\Omega)$ che si approssimano al solito modo con $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ oppure $u_n \in C_c^m(\Omega)$.
- Chiusura in $W^{m,p}(\Omega)$ di $C_c^\infty(\Omega)$ oppure $C_c^m(\Omega)$ (ovviamente chiusura risp. alla solita norma).

Oss. Brutalmente $W_0^{m,p}(\Omega)$ vorrebbe essere lo spazio delle funzioni $u \in W^{m,p}(\Omega)$ che sono nulle al bordo. In realtà non è proprio così, tranne nel caso in cui $\partial\Omega$ è abbastanza regolare.

— o — o —

Achtung! Non bisogna confondere spazi del tipo

$$W_0^{2,p}(\Omega)$$

e

$$W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

Pensiamo al caso $\Omega = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Allora

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : \underbrace{u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0}_{\text{valori puntuali di } u \text{ e } u' \text{ hanno senso fino al bordo}}\}$$

$$W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : u(a) = u(b) = 0\}$$

Nel primo caso abbiamo approx. $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$ che convergono risp. a $\|u\|_{2,p,(a,b)}$. Questo per A.A. implica la conv. unif. in $[a,b]$ di u_n e u_n' , e queste si annullano al bordo.

Nel secondo caso la conv. è solo in $\|u\|_{1,p,(a,b)}$ il che implica l'unif. solo sulle funzioni.
— o — o —

Teoremi di immersione Anche se Ω è terribile, questi valgono nella versione più pura possibile, come possiamo in $\mathbb{R}^d$. In particolare per $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si hanno queste stime.

• Per $p < d$ vale

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c(p,d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Pena!

• Per $p = d$ vale

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(p,d,q) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

$\forall q \in [p, +\infty)$

• Per $p > d$ vale

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(p,d) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

e siamo

la costante di $(1 - \frac{d}{p})$ -Hölder in modo puro ($\leq c(p,d) \|\nabla u\|_p$).

Valgono inoltre tutte le stime che si ottengono per interpolazione, ad esempio, per $p < d$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, d, q) \|u\|_{1, p, \Omega}$$

$$\forall q \in [p, p^*]$$

$$\forall q \leq p^* \text{ se}$$

$$\text{meas}(\Omega) < +\infty$$

Discorso analogo se $u \in W_0^{m, p}(\Omega)$

Dim. Valgono in $C_c^\infty(\Omega)$ e passando al limite valgono in $W_0^{m, p}(\Omega)$.

Oss. Allo stesso modo i teoremi di immersione compatta valgono in $W_0^{1, p}(\Omega)$, anche se Ω è terribile, purché limitato.

— o — o —

Prop. (Implicazione facile) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ qualunque, $u \in W_0^{1, p}(\Omega)$. Allora l'estesa a 0 fuori di Ω , che indichiamo con $\hat{u}$, sta in $W^{1, p}(\mathbb{R}^d)$.

Dim. Prendiamo le approx. $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ come nella def. Le loro estese $\hat{u}_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ora

$$\hat{u}_m \rightarrow \hat{u} \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

$$\nabla \hat{u}_m = \widehat{\nabla u_m} \rightarrow \widehat{\nabla u} \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

A posteriori questo dice pure che $\widehat{\nabla u} = \nabla \hat{u}$.

— o — o —

Prop. Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $p > d$, allora davvero

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$$

Dim. La conv. delle approx. è unif. su $\text{Clos}(\Omega)$.
— o — o —

Teorema (Caratterizzazione di $W_0^{1,p}(\Omega)$)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto con $\partial\Omega$ regolare (C^1 + compatto). Allora i seguenti 3 fatti sono equivalenti

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

(ii) $\hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$
 $\uparrow$ estesa a 0 fuori

(iii) $\text{Tr} u = 0$
 $\uparrow$ traccia su $\partial\Omega$, ben definita essendo tutto regolare

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) vale sempre.

A noi serve (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii)

(i) $\Rightarrow$ (iii) Segue dalla costruzione della traccia come limite delle tracce di approx. regolari, che ora posso prendere nulle al bordo.

In alternativa, si può fare seguire dalla continuità della traccia: se $u_n \rightarrow u$ e controllo i gradienti, allora $\text{Tr} u_n \rightarrow \text{Tr} u$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Con i soliti discorsi ci si riduce al caso $\Omega = \mathbb{R}_+^d$ (controllare con partizione dell'unità)

Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ con traccia nulla. Voglio dim. che $\hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, con

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u} D_{x_i} \varphi \, dx \, dy = - \int_{\mathbb{R}^d} D_{x_i} \hat{u} \varphi \, dx \, dy$$

$\uparrow$ $\swarrow$
 prime $\swarrow$ $\nearrow$ d -esima
 $d-1$ variabili

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sarebbe ovvio se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$.

Nel caso generale la formula di sopra vale con al RHS anche un termine di bordo del tipo

$$- \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(x,0) \varphi(x,0) \, dx$$

$\uparrow$ $\text{Tr } u$, che per ipotesi si annulla

(ii) $\Rightarrow$ (i) Come sempre ci riduciamo a $\mathbb{R}_+^d$

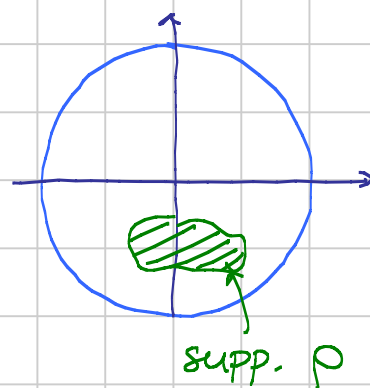
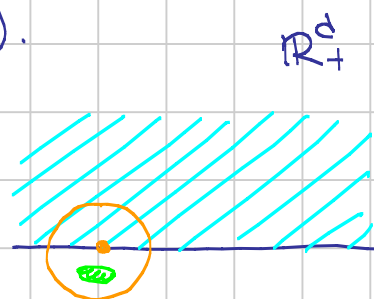
Data $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ la cui estesa $\hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, voglio approx u mediante $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$.

Ingenualmente proveremo fare delle convoluzioni, ma a priori questo non sembra garantire il supporto contenuto in $\mathbb{R}_+^d$.

Questo è dovuto ad un nucleo radiale centrato nell'origine.

Se invece usiamo un nucleo con supporto ben contenuto nella parte bassa di $B(0,1)$, allora $\ddot{\smile}$.

Questo garantisce una fascia di sicurezza intorno a $\partial \mathbb{R}_+^d$ in cui la convoluzione si annulla !!



— o — o —