

Continuità della traccia

Prop Sia $d \geq 2$ intero e $p > 1$. Allora la traccia è $\frac{1}{p'}$ -Hölderiana dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Detto meglio, per ogni $0 \leq y_1 \leq y_2$ vale

$$\|u(x, y_2) - u(x, y_1)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} |y_2 - y_1|^{1/p'}$$

Dim Supponiamo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^{d-1}$ vale

$$\begin{aligned} |u(x, y_2) - u(x, y_1)| &\leq \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| dy \\ &\leq \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dy \right\}^{1/p} |y_2 - y_1|^{1/p'} \end{aligned}$$

Eleviamo alla p e integriamo in dx :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, y_2) - u(x, y_1)|^p dx &\leq |y_2 - y_1|^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^p dx dy \end{aligned}$$

Elevando alla $1/p$ segue la tesi per $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Per $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ qualunque estendo, approssimo del u e passo al limite.

— o — o —

Teorema (Continuità della traccia) [motivazione nel video]

Sia $d \geq 2$ intero, sia $p > 1$, sia $\{\mu_n\} \subseteq W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ tale che
 $\uparrow$ escluso

$$(i) \mu_n \rightarrow \mu_\infty \text{ in } L^p(\mathbb{R}_+^d)$$

$$(ii) \|\nabla \mu_n\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} \leq M$$

$$\text{Allora } \text{Tr } \mu_n \rightarrow \text{Tr } \mu_\infty \text{ in } L^q(\mathbb{R}^{d-1})$$

per ogni $q \in [p, \hat{p}_*)$
 $\uparrow$ escluso

Dim. Trucco alla Money della zona di scambio, che ora è
 $y \in [0, \delta]$.

Fisso $\delta > 0$. Per ogni $y \in [0, \delta]$ vale

$$\begin{aligned} \|\mu_n(x, 0) - \mu_\infty(x, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} &\leq \|\mu_n(x, 0) - \mu_n(x, y)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \\ &\quad + \|\mu_n(x, y) - \mu_\infty(x, y)\|_{L^p(\dots)} \\ &\quad + \|\mu_\infty(x, y) - \mu_\infty(x, 0)\|_{L^p(\dots)} \end{aligned}$$

Eleviamo alla p e usiamo

$$(a+b+c)^p \leq c(p) (a^p + b^p + c^p) \quad \forall (a, b, c) \in [0, +\infty)^3$$

$\stackrel{3^{p-1}}{\text{"3^{p-1}"}}$

Otteniamo

$$\|\mu_n(x, 0) - \mu_\infty(x, 0)\|_{L^p(\dots)}^p \leq c(p) \left\{ \|\mu_n(x, 0) - \mu_n(x, y)\|_{L^p(\dots)}^p \right. \quad (1)$$

$$+ \|\mu_n(x, y) - \mu_\infty(x, y)\|_{L^p(\dots)}^p \quad (2)$$

$$+ \|\mu_\infty(x, y) - \mu_\infty(x, 0)\|_{L^p(\dots)}^p \left. \right\} \quad (3)$$

Integro in dy per $y \in [0, \delta]$.

$$\text{LHS} = \delta \|u_m(x, 0) - u_\infty(x, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p$$

$$\textcircled{1} \leq \left\| \frac{\partial u_m}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p |y|^{\frac{p}{p'}} \leq M^p \delta^{\frac{p}{p'}}$$

e quindi

$$\int \textcircled{1} dy \leq M^p \delta^{1 + \frac{p}{p'}}$$

Analogamente

$$\int \textcircled{3} dy \leq \underbrace{\left\| \frac{\partial u_\infty}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p}_{\downarrow \text{poi diremo che è finita}} \delta^{1 + \frac{p}{p'}}$$

$$\int_0^\delta dy \textcircled{2} = \int_0^\delta dy \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx |u_m(x, y) - u_\infty(x, y)|^p$$

$$\leq \|u_m - u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p$$

Mettendo tutto insieme abbiamo ottenuto

$$\delta \|Tr u_m - Tr u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p \leq C(p) \left\{ M^p \delta^{1 + \frac{p}{p'}} + \left\| \frac{\partial u_\infty}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p \delta^{1 + \frac{p}{p'}} + \|u_m - u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p \right\}$$

Ora faccio a dx e sx il limsup per $n \rightarrow \infty$

$$\delta \limsup \|Tr u_m - Tr u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p \leq \delta^{1 + \frac{p}{p'}} C(p) \{M^p + \text{cost}^p\}$$

Ora mando $\delta \rightarrow 0^+$ e ho finito nel caso $q = p$.

Così ho ottenuto che $\text{Tr } u_n \rightarrow \text{Tr } u_\infty$ in $L^p(\mathbb{R}^{d-1})$.

La convergenza per ogni $q \in [p, \hat{p}_*)$ segue per interpolazione grazie

- alla convergenza in L^p
- alla limitazione uniforme in $L^{\hat{p}_*}$.

Resta da dire (anzi andava fatto come prima cosa) che $u_\infty \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$.

Questo segue dai soliti discorsi:

$\|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} \leq M$ quindi essendo $p > 1$ esiste s.succ. che conv. debolmente

$$\frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i} \rightharpoonup v_i \quad \text{per } i = 1, \dots, d$$

Per il solito doppio scambio nelle int. per parti $v_i = \frac{\partial u_\infty}{\partial x_i}$

Per convessità segue anche che

$$\|\nabla u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} \leq M$$

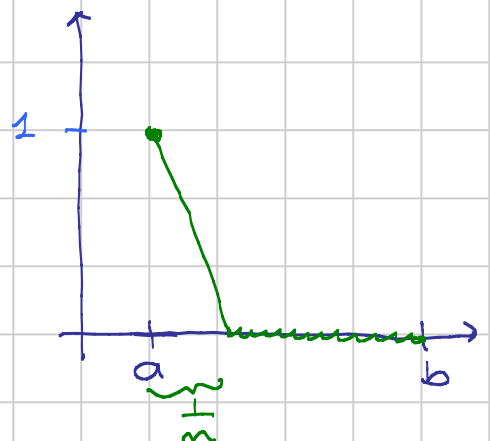
Oss. Per $p=1$ le tracce sono definite ma funzionano male, in particolare il teo. di passaggio al limite non vale, nemmeno in $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$

Consideriamo le u_n in figura

$u_n \rightarrow 0$ in tutti gli L^p con $p < +\infty$

senza davvero $p=1$
 $\|u_n\|_{L^1((a,b))} = 1 \leq M$

$$\text{Tr } u_n \not\rightarrow \text{Tr } u_\infty$$



CASO DI APERTO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Posso definire una $\text{Tr}: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$

a patto di avere

↑ supposto decente
da poterci integrare

- una stima del tipo

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(d, p, \Omega) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

(u def. ovunque, LHS su $\partial\Omega$, RHS su Ω (ma non sarebbe grave se fosse su tutto $\mathbb{R}^d$))

- Ω che ammette approx. deluxe col extender

Dimostrazione del tutto analoga: estendo, approx deluxe le estese, succ. di Cauchy...

Come ottengo la stima chiave?

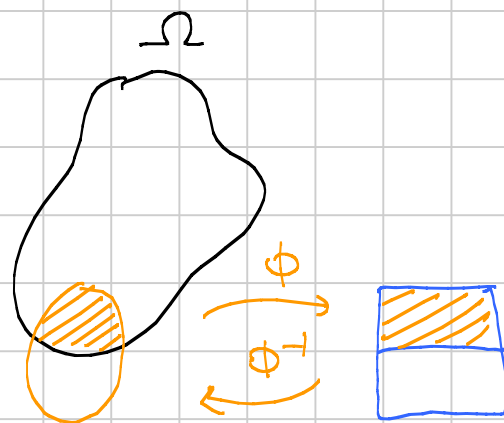
Con la partizione dell'unità, a patto che $\partial\Omega$ la supporti.

Scrivo $u = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

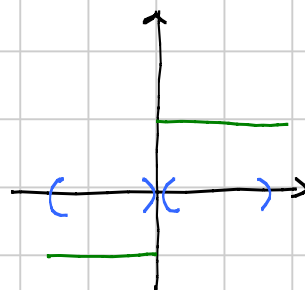
Le varie u_i le trasporto sul

cubetto standard, che poi è come fosse un semispazio, lì vale la stima, e poi torno indietro.

[Dettagli per esercizio]



Oss. I bordi bilateri sono unici delle tracce



Problema La traccia è surgettiva? NO

Chi è l'immagine della traccia?

Risposta per il futuro:

$$W^{1-\frac{1}{p}, p}(\partial\Omega) \quad !!!$$

non intero

[Vedi fine corso per caso $p=2$].