

TRACCE DI FUNZIONI DI SOBOLEV

Problema generale : data $u \in W^{1,p}(\Omega)$, definire $u|_{\partial\Omega}$ o più in generale $u|_K$ con $K \subseteq \Omega$ sottosistema "d-1 dimensionale".

Più rigorosamente vorremmo

$$\text{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \text{qualcosa}(\partial\Omega)$$

con un po' di proprietà :

→ linearità

→ sulle funzioni continue è la restrizione

→ stima del tipo

$$\|\text{Tr } u\|_{\text{qualcosa}} \leq C(p, d, \Omega) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

→ formula di cut. per parti

→ dipendenza continua da u

Oss. Per le funzioni $L^p(\Omega)$ tutto questo è impossibile

Casi facili

① $\Omega = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, almeno per $p > 1$. Le funzioni Sobolev sono Hölder e quindi hanno valori puntuali fino al bordo

② $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto regolare, $p > d$.

Anche in questo caso $W^{1,p}$ si immerge nelle Hölder, quindi tutto ok con

$$\text{qualcosa} = C^0(\partial\Omega)$$

CASO MODELLO NON BANALE

$$d \geq 2, \quad p < d$$

$$\mathbb{R}_+^d := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : y > 0\}$$

Proposizione Per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ valgono le seguenti stime

$$(1) \quad \|u(x, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}_+^d}$$

Impura, ma
RHS su
 $\mathbb{R}_+^d$

- u è definita ovunque in $\mathbb{R}^d$
- il LHS ha la norma in $\mathbb{R}^{d-1}$
- il RHS ha la norma in $\mathbb{R}_+^d$

$$(2) \quad \text{Posto } \hat{p}_* := \frac{p(d-1)}{d-p} \quad \text{si ha } \hat{p}_* > p \text{ se } p > 1$$

$$\|u(x, 0)\|_{L^{\hat{p}_*}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

pura con ∇ su tutto $\mathbb{R}^d$

(3) per ogni $q \in [p, \hat{p}_*]$ vale

$$\|u(x, 0)\|_{L^q(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p, d, q) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}^d}$$

Impura con full norm in $\mathbb{R}^d$

Dcm. Step 1 Caso $p=1$ finito, basta sostituirlo con $\mathbb{R}$ grande

$$u(x, 0) = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy$$

$$|u(x, 0)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, 0)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_0^{+\infty} dy \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| = \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+^d)}$$

Step 2 p generico. Applico step 1 a

$$v(x,y) := |u(x,y)|^n u(x,y) = \varphi(u(x,y))$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \varphi'(u(x,y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = (n+1) |u(x,y)|^n \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

Dallo step 1 segue che

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x,0)|^{n+1} dx = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v(x,0)| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \right| dx dy$$

$$= (n+1) \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x,y)|^n \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right| dx dy$$

$$\leq (n+1) \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x,y)|^{\frac{np}{p-1}} dx dy \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right|^p dx dy \right\}^{1/p}$$

Scegliendo $n = p-1$ diventa

$$\begin{aligned} \|u(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p &\leq p \|u(x,y)\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^{p-1} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} \\ &\leq \|u\|_{L^p, \mathbb{R}_+^d}^{p-1} \|u\|_{L^p, \mathbb{R}_+^d} \end{aligned}$$

Elevando alla $1/p$ ho finito. La ① è dimostrata

Step 3 Scelgo n in modo tale che $\frac{np}{p-1} = p_* = \frac{pd}{d-p}$

In questo la relazione di sopra diventa

$$\begin{aligned} \|u(x, 0)\|_{L^{n+1}(\mathbb{R}^{d-1})}^{n+1} &\leq (n+1) \underbrace{\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}_+^d)}}^n \underbrace{\left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}}^1 \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^n \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^1 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{qui su tutto} \end{aligned}$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^2 \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

qui su tutto

Elevando tutto alla $\frac{1}{n+1}$ ho la stima su $L^{n+1}(\mathbb{R}^{d-1})$.

Wie ist r_{t+1} ? $\frac{r p}{p-1} = \frac{p d}{d-p} \Rightarrow r = \frac{d(p-1)}{d-p}$

$$\Rightarrow z+1 = \frac{d(p-1)}{d-p} + 1 = \frac{d p - \cancel{d} + \cancel{d} - p}{d-p} = \frac{p(d-1)}{d-p} = \hat{p}_*$$

Step 4 La stima per $q \in [p, \hat{p}_*]$ segue per interpolazione

Teorema Siano $d \geq 2$ intero e $p \in [1, +\infty]$.

Allora per ogni $q \in [p, \hat{p}_*]$ esiste

$$\text{Tr}: W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^{d-1})$$

con le proprietà seguenti

- ① È lineare
- ② $[Tr u](x) = u(x, 0)$ per le $u \in C^0 \cap W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$

③ Valgono le stime come nella proposizione

von $\mathbb{R}_+^d$

④ Vale la formula di integrazione per parti $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} u(x,y) \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) dx dy = - \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \phi(x,y) dx dy$$

$$- \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{u(x, 0)}_{\text{Tr } u(x)} \varphi(x, 0) dx$$

Dim

Definizione di Tr

Prendo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$

La estendo per parità a $\hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Approssimo deluxe $\hat{u}$ con una successione $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Osservo che u_n è di Cauchy per la full norm anche in $\mathbb{R}^d$

Dalla proposizione deduco che $\{u_n(x,0)\}$ sono di Cauchy in $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$, quindi hanno un limite.

Il limite NON dipende dalle approx. scelte. Se $\{v_n\}$ sono altre approx., allora

$$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \dots$$

sono ancora approx., quindi ancora di Cauchy e idem le loro restrizioni al bordo.

$$\text{Pongo } \text{Tr } u = \lim_{x \downarrow 0} u_n(x,0)$$

$\uparrow$ fatto in $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$

Linearità Ovvio

Coincidenza nel caso continuo Se $u \in C^0$, allora $\hat{u} \in C^0$ e allora se scelgo le u_n fatte per convoluzione queste convergono puntualmente a $\hat{u}$ ovunque, quindi anche nei pti del tipo $(x,0)$.

Int. per parti Vale sulle approx e poi passo al limite.

Oss. In tutte le stime posso mettere al RHS solo norme su $\mathbb{R}_+^d$ (avendo esteso per ribaltamento $\|\hat{u}\|_{1,p,\mathbb{R}^d} = 2 \|u\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}$).