

Teorema (RELLICH - KONDRACHOV)

Sia $d \geq 1$ un intero e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto **LIMITATO** per cui valgono i teoremi di immersione (ma non servirà davvero)

Caso $p < d$ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ è compatta per ogni $q < p^*$ (minore **STRETTO**)

Caso $p = d$ L'immersione di sopra è compatta per ogni $q < +\infty$.

Caso $p > d$ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C^0(\text{clos}(\Omega))$ è compatta.

Def. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ con X e Y metrici si dice compatta se manda limitati di X in rel. cpt. di Y .
In termini di succ.: se $\{x_n\} \subseteq X$ è limitata, allora $f(x_n)$ ha s. succ. conv. in Y .

Dim. **Caso $p > d$** Tranquillo: un bound su $\|u\|_{1,p,\Omega}$ produce un bound su $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ e sulle costanti di Hölder $\leadsto$ A.A. classico

Caso $p = d$ Tranquillo. Dato $q < +\infty$, esiste $p_1 < d$ tale che $q < (p_1)^*$

Ora $u \in W^{1,d} \Rightarrow u \in W^{1,p_1}$ e quindi il risultato segue dal caso $p_1 < d$.

Caso $p < d$ Considero la famiglia

$$\mathcal{F} := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{1,p,\Omega} \leq M\}$$

e devo dim. che γ è rel. cpt. in $L^q(\Omega)$ per ogni $q < p^*$

Iniziamo con il caso $q = 1$ Devo verificare le ipotesi del criterio di rel. cpt.

Ω limitato e $\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq \text{cost.}$ Sono ovvi.

Step 1 Per ogni $k \geq 1$ poniamo

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$$

e osserviamo che $\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k) \rightarrow 0$

(sono i seni a ∂ vuota contenuti in Ω di misura finita)

Step 2 Dimostriamo che

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| dx \leq 2 \|u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{1/p'}$$

$$\text{LHS} \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x+R)| dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x)| dx$$

Stimo il secondo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x)| \cdot 1 dx &\leq \underbrace{\|\hat{u}\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega_k)}}_{\leq \|\hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}} \cdot \|1\|_{L^{p'}(\Omega \setminus \Omega_k)} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|\chi_{\Omega \setminus \Omega_k}\|_{L^{p'}(\Omega)} \end{aligned}$$

Stessa cosa per l'altro addendo.

Step 3 Mostriamo che, per $|R| \leq \frac{1}{k}$, vale la stima

$$\int_{\Omega_k} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| dx \leq |R| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \{\text{meas}(\Omega)\}^{1/p'}$$

Ossevo che se $x \in \Omega_k$ e $|R| \leq \frac{1}{k}$, allora

$$\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x) = u(x+R) - u(x)$$

Supponiamo che u sia $C^\infty(\Omega)$. Allora

$$\begin{aligned} |u(x+R) - u(x)| &= |\psi(1) - \psi(0)| \leq \int_0^1 |\psi'(t)| dt \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \psi(t) := u(x+Rt) \\ &= \int_0^1 |\langle \nabla u(x+Rt), R \rangle| dt \leq |R| \int_0^1 |\nabla u(x+Rt)| dt \end{aligned}$$

Integro in dx :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} |u(x+R) - u(x)| dx &\leq |R| \int_{\Omega_k} dx \int_0^1 |\nabla u(x+Rt)| dt \\ &= |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega_k} |\nabla u(\underbrace{x+Rt}_{"y"})| dx \\ &= |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega_k + Rt} |\nabla u(y)| dy \\ &\quad \uparrow \text{traslato di } \Omega_k \subseteq \Omega \\ &\leq |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega} |\nabla u(y)| dy \\ &= |R| \int_{\Omega} |\nabla u(y)| \cdot \underbrace{1}_{\frac{1}{p'}} dy \\ &\leq |R| \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \{ \text{meas}(\Omega) \}^{1/p'} \end{aligned}$$

Se u è meno regolare, la approssimo low-cost con funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e tutto dovrebbe passare al limite (può che senza $|R| < \frac{1}{2k}$ perché i gradienti convergono solo negli aperti ben contenuti).

Step 4 Concludiamo opt. in $L^1(\Omega)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\|\tau_k \hat{u} - \hat{u}\|_{L^1(\Omega)} &= \|\tau_k \hat{u} - \hat{u}\|_{L^1(\Omega \setminus \Omega_k)} + \|\tau_k \hat{u} - \hat{u}\|_{L^1(\Omega_k)} \\ &\leq 2 \|u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{1/p'} \\ &\quad + |\Omega| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega)\}^{1/p'}\end{aligned}$$

Rigorosamente (voglio verificare (ii) di A.A. $L^1(\Omega)$)

- mi viene dato $\varepsilon > 0$
- scelgo k abb. grande in modo che 1° termine $\leq \frac{\varepsilon}{2}$
- visto k , scelgo $\delta < \frac{1}{k}$ in modo che il 2° termine sia $\leq \frac{\varepsilon}{2}$

Mettendo insieme ho finito.

Conquista di $q < p^*$

SLOGAN: limitato in L^{p^*} e piccolo / convergente in L^1
implica piccolo / convergente in L^q per ogni $q < p^*$.

Disug. di interpolazione: per ogni $1 < q < p^*$ esiste $\alpha \in (0,1)$ tale che

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^\alpha \cdot \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{1-\alpha}$$

Conclusione facile in 2 modi (qui uso le immersioni)

- ① Via A.A. $L^q(\Omega)$. Devo stimare $\|\tau_k \hat{u} - \hat{u}\|_{L^q(\Omega)}$.
So che sono piccole in L^1 e limitate in L^{p^*}
(metto somma e osservo che $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{1,p,\Omega}$)

② Penso alla relativa cpl. cu termini di succ.

Se prendo $\{u_n\}$ limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, allora

- u_n è limitata in $L^{p^*}(\Omega)$
- u_n ha s.succ. conv. in $L^1(\Omega)$, quindi in tutti gli L^q con $q < p^*$.

— o — o —

Oss. In tutta la prima parte della dim. non abbiamo usato che valga la immersione.

Esempio L'immersione NON è mai compatta quando $q = p^*$.

Dim. **Step 1** Esiste $\{x_n\} \subseteq \Omega$ ed esiste $\{r_n\} \subseteq (0, +\infty)$ tale che

$B(x_n, r_n) \subseteq \Omega$ e disgiunte

Step 2 Scelgo $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$ non banale e pongo



$$u_n(x) = \lambda_n \varphi\left(\frac{x - x_n}{r_n}\right) \in C_c^\infty(B(x_n, r_n))$$

↑
scelto in modo che $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$

Step 3 Dico che le $\{u_n\}$ sono equilimitate in $W^{1,p}(\Omega)$
Per questo mi basta limitare

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)}$$

Facendo il conto (occorre aver calcolato λ_n prima) si vede che tendono addirittura a 0!!!

Step 4 Ossewo che $\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ è costante !!!!!

Fatto fondamentale: i λ_m vanno via !!!

Step 5 Ossewo che $\{u_m\}$ non può avere s.succ. conv. in $L^{p^*}(\Omega)$ perché non ha s.succ. di Cauchy

$$\|u_m - u_m\|_{L^{p^*}}^{p^*} = \|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} + \|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} = 2 \text{ Costante}$$

↑
supporti disgiunti
se $m \neq n$.

— o — o —

Oss. Convergono a 0 in ogni $L^q(\Omega)$ con $q < p^*$.

— o — o —