

TEOREMI DI COMPATTEZZA

Obiettivo: data $\{u_m\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ con $\|u_m\|_{1,p,\Omega} \leq M$,
 sperare di trovare s.succ. che converga in qualche
 senso FORTE. (Debole sarebbe banale)
 (Applicazioni ovvie ai funzionali)

COMPATTEZZA IN SPAZI METRICI

Teorema (Caratt. comp.: vedi Analisi 2)

Sia (X, d) uno sp. metrico. Allora sono equiv:

- (i) X è compatto per ricoprimenti
- (ii) X è compatto per succ.
- (iii) X è completo + tot. limitato

Def. (X, d) è tot. limitato se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $S \subseteq X$
 con S **FINITO** tale che

$$X \subseteq \bigcup_{s \in S} B(s, \varepsilon)$$

Un tale S si dice ε -rete.

Prop. (Caratt. della relativa compattezza)

Sia (X, d) uno sp. metrico **completo**. Sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme.

Allora i seguenti fatti sono equiv:

- (i) $\text{Clos}(Y)$ è compatto (risp. metrica ristretta)
- (ii) ogni succ. a valori in Y ammette s.succ. convergente
 (magari non ad un elemento di Y)
- (iii) Y è totalmente limitato (risp. metrica ristretta).

Prop. (Caratt. della totale limitatezza)

Sia (X, d) metrico, e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme.

Allora sono equivalenti

- (i) Y è tot. limitato ↗ non nec. in Y
(ii) $\forall \varepsilon > 0$ esiste $K \subseteq X$ tot. limitato t.c.

$$Y \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon)$$

(K è una ε -rete, ma non nec. finita)

(quando si va ad usare, di solito si usa K compatto)

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) è banale

(ii) $\Rightarrow$ (i). Dato $\varepsilon > 0$ scelgo un K che va bene per $\frac{\varepsilon}{2}$

Scelgo S per K che va bene per $\frac{\varepsilon}{2}$

e concludo che S va bene per Y con ε .

— o — o —

Morale della favola: in un metrico completo, se voglio dim.

che un sottoinsieme Y è rel. compatto,

basta che trovi un K compatto t.c. ogni

el. di Y dista da K meno di ε .

(K dipende da ε)

— o — o —

TEOREMA (Ascoli - Arzelà in L^p)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto, sia $p \in [1, +\infty)$ (vedere che succede per $p = +\infty$), sia $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$.

Supponiamo che

(i) Ω limitato

(ii) $\mathcal{F}$ è limitata in $L^p(\Omega)$, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathcal{F} \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq M$$

(iii) $\mathcal{Y}$ è equicontinua nel senso $L^p(\Omega)$ cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall u \in \mathcal{Y} \quad \forall R \in \mathbb{R}^d$$

$$|R| \leq \delta \Rightarrow \left\{ \int_{\Omega} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \varepsilon$$

$\uparrow$ estesa a 0 fuori di Ω

$$= \| \tau_R \hat{u} - \hat{u} \|_{L^p(\Omega)}$$

$\uparrow$ traslata R -esima

Allora $\mathcal{Y}$ è relativamente compatta in $L^p(\Omega)$.

Oss. L'enunciato vale per famiglie $\mathcal{Y} \subseteq L^p(\Omega)$, ma ha conseguenze in termini di succ.

Dim. Basta dimostrare che $\mathcal{Y}$ è tot. limitata in $L^p(\Omega)$.
" " che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K_\varepsilon \subseteq L^p(\Omega)$
compatto tale che

$$\mathcal{Y} \subseteq \bigcup_{u \in K_\varepsilon} B(u, \varepsilon)$$

$\uparrow$ palla in $L^p(\Omega)$

Dato $\varepsilon > 0$, scelgo il $\delta > 0$ dato dall'ipotesi (iii), scelgo un mollificatore ρ e pongo

$$K_\varepsilon := \{ \hat{u} * \rho_\delta : u \in \mathcal{Y} \}$$

Step 1 Verifichiamo che è una ε -rete, cioè

$$\forall u \in \mathcal{Y} \quad \exists v \in K_\varepsilon \quad \|u - v\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$$

Chi sarà mai v ? Ovviamente $v = \hat{u} * \rho_\delta$

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x+\delta y) \rho(y) dy$$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x) \rho(y) dy$$

quindi

$$|v(x) - u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x+\delta y) - \hat{u}(x)| \rho(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|\hat{u}(x+\delta y) - \hat{u}(x)|}_{\frac{1}{p}} \underbrace{\rho(y)^{\frac{1}{p}}}_{\frac{1}{p'}} \rho(y)^{\frac{1}{p'}} dy$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x+\delta y) - \hat{u}(x)|^p \rho(y) dy \right\}^{1/p} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) dy \right\}^{1/p'}}_{=1}$$

Ora che ρ è "entrata dentro", integro in x

$$\int_{\Omega} |v(x) - u(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x+\delta y) - \hat{u}(x)|^p \rho(y) dy$$

$$= \int_{\substack{\mathbb{R}^d \\ \uparrow B(0,1)}} \rho(y) dy \int_{\Omega} |\hat{u}(x+\delta y) - \hat{u}(x)|^p dx$$

$$\uparrow |\delta y| \leq \delta$$

$$\leq \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) dy = \varepsilon^p$$

Con la nozione ho la tesi.

Step 2 Dimostro che K_ε è equi-lim. in norma uniforme

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall v \in K_\varepsilon \quad \|v(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$$

$$|v(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|\hat{u}(x+\delta y)|}_{\frac{1}{p}} \underbrace{\rho(y)}_{\frac{1}{p'}} dy$$

$$\uparrow v = \hat{u} * \rho_\delta$$

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(x + \delta y)|^p dy \right\}^{1/p} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)^{p'} dy \right\}^{1/p'}}_{\text{numero}}$$

$$= \left\{ \frac{1}{\delta^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(z)|^p dz \right\}^{1/p} \cdot \text{numero}$$

$$= \text{numero} \cdot \underbrace{\|\hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}_{\|u\|_{L^p(\Omega)}} \leq M \quad \uparrow \text{(ipotesi (ii))}$$

Step 3 Dimostro che K_ε è equi-Lipschitz, cioè

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall v \in K_\varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad |\nabla v(x)| \leq L$$

Ora $v = \hat{u} * \rho_\delta$ e faccio il conto

$$\nabla v(x) = \nabla \left[\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x + \delta y) \rho(y) dy \right]$$

$$= \nabla \left[\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(z) \rho\left(\frac{x-z}{\delta}\right) \frac{1}{\delta^d} dz \right]$$

$$= \frac{1}{\delta^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(z) [\nabla \rho]\left(\frac{x-z}{\delta}\right) \left(-\frac{1}{\delta}\right) dz$$

$$= -\frac{1}{\delta^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(z) [\nabla \rho]\left(\frac{x-z}{\delta}\right) dz$$

Metto i moduli e uso Hölder

$$|\nabla v(x)| \leq \frac{1}{\delta^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|\hat{u}(z)|}_{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{|[\nabla \rho]\left(\frac{x-z}{\delta}\right)|}_{\frac{1}{p'}} \cdot dz$$

[Dopo video: tutti
gli $x-z$ sono
 $z-x$:)]

$$\leq \underbrace{\frac{1}{\delta^{d+1}}}_{\text{numero}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(z)|^p dz \right\}^{1/p}}_{\text{limitato per (ii)}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \left| [\nabla p] \left(\frac{x-z}{\delta} \right) \right|^{p'} dz \right\}^{1/p'}}_{\text{numero}}$$

Step 4

Grazie agli Step 2 e 3 u_ε insieme K_ε è rel. compatto rispetto alla conv. uniforme in $\text{Clos}(\Omega)$

(senza insieme compatto per usare AA classico)

A maggior ragione K_ε è rel. cpt., quindi tot.

lim., in $L^p(\Omega)$.

— o — o —