

Def. (Aperto con bordo di classe C^1 compatto)

Sia $d \geq 1$ intero. Poniamo

$$Q := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^d : |x| < 1, |y| < 1 \}$$

$\uparrow$
prime $d-1$ variabili

$$Q^+ := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^d : |x| < 1, 0 < y < 1 \}$$

Consideriamo aperti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ tali che

- $\partial\Omega$ è compatto
- per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno U di x ed esiste

$\phi: U \rightarrow Q$ tale che

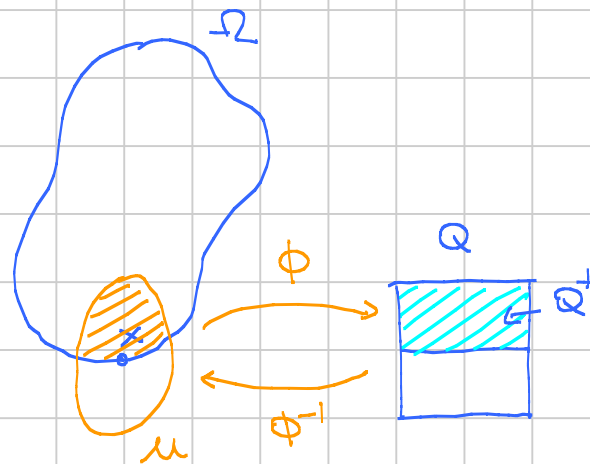
(i) ϕ è invertibile

(ii) ϕ e ϕ^{-1} sono di classe C^1

(iii) J_ϕ e $J_{\phi^{-1}}$ sono limitati

(iv) $\phi(U \cap \Omega) = Q^+$

(v) $\phi(U \cap \partial\Omega) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^d : |x| < 1 \text{ e } y = 0 \}$



Teorema

Se Ω è come nella definizione, allora esiste un'estensione da $W^{1,p}(\Omega)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Partizione dell'unità (tipo B)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto con $\partial\Omega$ compatta.

Sia $A_1, \dots, A_n$ un ricoprimento aperto finito di $\partial\Omega$.

Poniamo $A_0 := \Omega$.

Allora esistono funzioni $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 $\uparrow$ c'è anche lei

che verificano le seguenti proprietà

(i) sono di classe C^∞

(ii) $0 \leq \psi_i(x) \leq 1 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

(iii) il supporto di $\psi_i(x)$ è ben contenuto in A_i per ogni $i = 1, \dots, n$

(iv) per $i=0$ il supporto di $\psi_0(x)$ ha distanza positiva da $\partial\Omega$

(v) vale

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \text{Clos}(\Omega)$$

— o — o —

Prop. (Composizione dentro) Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^d$ (con lo stesso d) e sia $\Phi: A \rightarrow B$ t.c.

(i) è invertibile

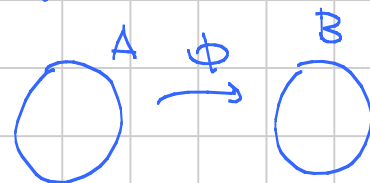
(ii) Φ e Φ^{-1} sono di classe C^1

(iii) J_Φ e $J_{\Phi^{-1}}$ sono limitati

} in A per Φ
in B per Φ^{-1}

Sia $u: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Allora per ogni $p \in [1, +\infty]$ vale



$$u \in W^{1,p}(B) \iff u \circ \Phi \in W^{1,p}(A)$$

e le derivate parziali sono quelle che uno si aspetta

$$\frac{\partial [u \circ \Phi]}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j}(\Phi(x)) \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(x)$$

← componente j -esima

o in notazione vettoriale $\nabla(u \circ \Phi) = \nabla u \cdot J\Phi$

In particolare esistono $m > 0$ e $M > 0$ t.c.

$$m \|u\|_{1,p,B} \leq \|u \circ \Phi\|_{1,p,A} \leq M \|u\|_{1,p,B}$$

Dim. ko. estensione date la proposizione

Ricopro $\partial\Omega$ con aperti M come nella definizione di bordo C^1 .

Estraggo s. ricopr. finito

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n M_i$$

Prendo la corrispondente partizione di 1 di tipo B che chiamo ψ_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

Pongo

$$u_i(x) := u(x) \cdot \psi_i(x)$$

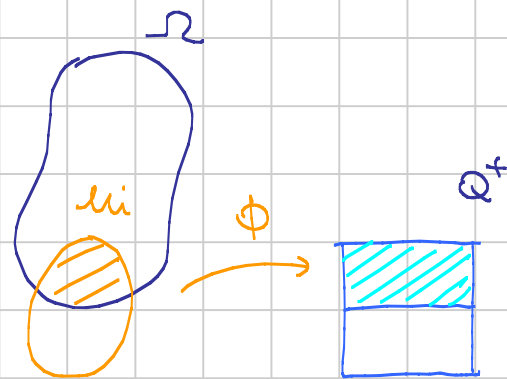
e osservo che

$$u(x) = \sum_{i=0}^n u_i(x)$$

e che ogni $u_i(x)$ ha supporto contenuto nel rispettivo M_i .

Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ considero la corrispondente Φ_i e pongo

$$v_i(x) = u_i(\Phi_i^{-1}(x)) \quad \text{su } Q^+$$



$$\hat{v}_i(x) := E_p v_i(x) \quad \text{su } Q \leftarrow \hat{v}_i \text{ ha supp. compatto in } Q$$

$$\hat{u}_i(x) := \hat{v}_i(\Phi_i(x)) \quad \text{su } M_i \leftarrow \hat{u}_i \text{ ha supp. compatto in } M_i$$

quindi la posso pensare definita su tutto $\mathbb{R}^d$.

Alla fine pongo

$$\hat{u}(x) := u_0(x) + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i(x)$$

Dico che $\hat{u}(x)$ estende $u(x)$ e sta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con costante controllata.

- L'estensione è quasi ovvia perché

$$u_i(x) = \hat{u}_i(x) \quad \text{in } u_i \cap \Omega$$

- Le costanti si controllano perché

$$\|\hat{u}_i\|_{1,p,u_i} \leq C_1 \|\hat{u}_i\|_{1,p,Q} \quad (\text{Prop})$$

$$\leq C_1 \cdot 2 \|\psi_i\|_{1,p,Q^+} \quad (\text{caso cilindrico})$$

$$\leq C_1 \cdot 2 \cdot C_2 \|u_i\|_{1,p,u_i \cap \Omega} \quad (\text{Prop})$$

$$\leq C_1 \cdot 2 \cdot C_2 \cdot C_3 \|u\|_{1,p,\Omega} \quad (u_i = u \cdot \psi_i)$$

— 0 — 0 —

Dim partizione di 1 $A_1, \dots, A_n$ ric. di $\partial\Omega$, $A_0 := \Omega$

Step 1 Si può risparmiare sul ricoprimento, cioè ponendo

$$A_{i,k} := \{x \in A_i : \text{dist}(x, \partial A_i) > \frac{1}{k}\}$$

si verifica che per k abbastanza grande vale che

$$\bigcup_{i=0}^n A_{i,k} \supseteq \text{Clos}(\Omega)$$

(Facile esercizio come nel tipo A)

Preso un k buono, indico con $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n$ gli aperti risparmiati che ricoprono ancora.

- Step 2** Per ogni $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ esiste θ_i di classe C^∞ a valori in $[0, 1]$ tale che
- $\theta_i(x) \equiv 1$ in $\hat{A}_i$
 - $\text{Supp } \theta_i \subseteq A_i$

Step 3 Poniamo

$$\psi_0(x) := \theta_0(x)$$

$$\psi_1(x) := \theta_1(x) (1 - \theta_0(x))$$

$$\psi_2(x) := \theta_2(x) (1 - \theta_0(x)) (1 - \theta_1(x))$$

$\vdots$

$$\psi_i(x) := \theta_i(x) \prod_{k=0}^{i-1} (1 - \theta_k(x))$$

Dico che queste vanno bene. Regolarità, supporti, valori in $[0, 1]$ sono evidenti.

La somma 1 segue dalla relazione

$$1 - \sum_{i=0}^n \psi_i(x) = \prod_{i=0}^n (1 - \theta_i(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Ogni $x \in \text{Clos}(\Omega)$ sta in qualche $\hat{A}_i$ e quindi $\theta_i(x) = 1$ rendendo nullo il prodotto.

La relazione decisiva è un caso particolare di

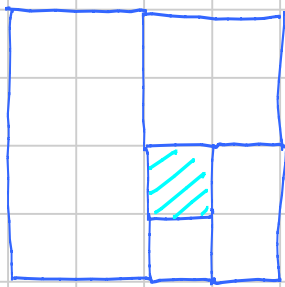
$$1 - \sum_{i=0}^k \psi_i(x) = \prod_{i=0}^k (1 - \theta_i(x))$$

che vale per inclusione per ogni $k = 0, 1, \dots, n$

Achtung! Il truccetto di definire $\psi_i(x) = \frac{\theta_i(x)}{\theta_0 + \dots + \theta_n}$

qui NON funziona!!! Nel caso di tipo A non c'erano confini tra un A_i e "il nulla" (spiegazione nel video).

Estender per il rettangolo alla Bressis



Con numero finito di riflessioni
estendo ad un intorno del
rettangolo originario

Poi moltiplico per q.c. che vale
0 fuori dal grande e $\neq$ nel
piccolo.