

Lemma (Approx. deluxe in tutto  $\mathbb{R}^d$ )

Se  $p < +\infty$  e  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ , allora esiste  $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  t.c.

- $u_n \rightarrow u$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$
- $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$

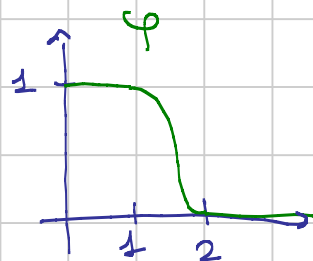
Dim. Obiettivo: data  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  e dato  $\varepsilon > 0$ , trovare  $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  t.c.  $\|u - v\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \varepsilon$

Si fa in due step.

Step 1 Sistemiamo il supp. cpt., cioè trovo  $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  ma a supp. cpt. t.c.

$$\|u - w\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Considero una cutoff come in figura e pongo



$$u_n(x) := u(x) \cdot \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$$

Osservo che  $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  (Sobolev.  $C_c^\infty$ ) e ha  $\text{supp} \subseteq B(0, 2n)$  e che

$$\begin{aligned} u_n(x) &\rightarrow u(x) && \text{puntuale dominata,} \\ \nabla u_n(x) &\rightarrow \nabla u(x) && \text{quindi in } L^p(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Basta prendere  $w = u_n$  per  $n$  grande.

Step 2 Trovo  $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  t.c.  $\|w - v\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$

Basta porre  $v = w * \rho_n$  con  $\rho$  mollif. e  $n$  piccolo.

Oss. Lo stesso vale in  $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ .

Dimostrazione immersioni per  $p < d$

$$p^* = \frac{pd}{d-p}$$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C(d,p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

Step 1  $p=1$  e  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) dt$$

↑  
fatto perché  $u$  è nulla definit.

da cui

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \right| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \right| dt \\ &=: \varphi_1(x_2, \dots, x_d) \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo:

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) \right| dt \\ &=: \varphi_i(\hat{x}_i) \end{aligned}$$

Concludo che

$$|u(x)| \leq \prod_{i=1}^d \underbrace{\varphi_i(\hat{x}_i)}_{\uparrow \text{funzioni } C_c^0(\mathbb{R}^{d-1})}^{\frac{1}{d}}$$

Elevo tutto alla  $\frac{d}{d-1} = 1^*$  e ottengo

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i)^{\frac{1}{d-1}}$$

Per la disug. di Gragliardo

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \leq \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi_i(\hat{x}_i) d\hat{x}_i \right\}^{\frac{1}{d-1}}$$

Calcolo gli integrali al RHS e ottengo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi_i(\hat{x}_i) d\hat{x}_i &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\hat{x}_i \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, \underset{\uparrow i}{t}, \dots, x_d) \right| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)| dx \\ &= \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Alla fine viene

$$\text{LHS} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d}{d-1}}$$

Portando l'esponente a sx ho finito.

**Step 2**  $\phi$  generico e  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

$$\text{Pongo } v(x) := |u(x)|^2 u(x) = \phi(u(x))$$

$\uparrow \phi(\sigma) = |\sigma|^2 \sigma$

$$\text{Ossevo che } \nabla v(x) = \phi'(u(x)) \nabla u(x)$$

$$\phi'(\sigma) = 2|\sigma|^2 = 2|u(x)|^2 \nabla u(x)$$

Applico caso  $p=1$  alla  $u(x)$

$$\|u\|_{L^{1*}} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{(n+1)\frac{d}{d-1}} dx \right\}^{\frac{d-1}{d}} &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{p-1}{p}} |\nabla u(x)|^{\frac{1}{p}} dx \\ &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{rp}{p-1}} dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p dx \right\}^{1/p} \end{aligned}$$

Riscrivo in termini di norme

$$\left\{ \|u\|_{L^{(n+1)\frac{d}{d-1}}} \right\}^{n+1} \leq \left\{ \|u\|_{L^{\frac{rp}{p-1}}} \right\}^r \|\nabla u\|_{L^p}$$

Scelgo  $r$  in modo che le norme di  $u$  siano nello stesso spazio

$$(n+1)\frac{d}{d-1} = \frac{rp}{p-1} \quad ; \quad r \left( \frac{d}{d-1} - \frac{p}{p-1} \right) = -\frac{d}{d-1}$$

$$r \frac{\cancel{d} - d - \cancel{dp} + p}{(\cancel{d-1})(p-1)} = -\frac{\cancel{d}}{\cancel{d-1}} \quad ; \quad r = \frac{(p-1)d}{d-p}$$

da cui

$$(n+1)\frac{d}{d-1} = \frac{rp}{p-1} = \frac{(\cancel{p-1})d}{d-p} \frac{p}{\cancel{p-1}} = \frac{dp}{d-p} = p_*$$

Semplificando  $r$  ho la tesi.

**Step 3**  $p$  generico,  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ . Uso approx. deluxe con succ.

$$\{u_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Per la approx. vale che

$$\|u_m\|_{L^{p^*}} \leq C(p, d) \|\nabla u_m\|_{L^p}$$

So che  $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ , quindi è succ. di Cauchy in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

Ma allora  $\{u_m\}$  è di Cauchy in  $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ , e quindi

$$\left. \begin{array}{ll} u_m \rightarrow u & \text{in } L^p(\mathbb{R}^d) \\ u_m \rightarrow \hat{u} & \text{in } L^{p^*}(\mathbb{R}^d) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ma } u = \hat{u} \text{ perché a} \\ \text{meno di s. succ. la} \\ \text{conv. è punt. q.o.} \end{array}$$

**Caso difficile  $p > d$**

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C(p, d, q) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}^d} \quad \forall q < +\infty \quad (\text{e } q \geq p)$$

**Dim** Basta farlo per le  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Riparto dalla disug. prec. con  $p = d$

$$\left\{ \|u\|_{L^{(n+1)\frac{p}{p-1}}} \right\}^{n+1} \leq \left\{ \|u\|_{L^{n\frac{p}{p-1}}} \right\}^n \|\nabla u\|_{L^p}$$

Lo spazio al LHS è meglio di quello al RHS, quindi posso sperare di iterare il procedimento.

Dimostro per induzione che

$$u \in L^{p + \frac{kp}{p-1}}(\mathbb{R}^d)$$

$$p_k := p + \frac{kp}{p-1}$$

con disuguaglianza impura.

**Passo base  $k=0$**  Ipotesi  $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$  (già qui la disug. è impura)

**Passo  $k \rightarrow k+1$**  Basta fare in modo che  $\frac{p_k}{p-1} = p_{k+1}$

$$\frac{rp}{p-1} = p + \frac{kp}{p-1} ; \quad r = \frac{p-1}{p} \left( p + \frac{kp}{p-1} \right) = p-1+k \quad \text{😊}$$

A questo punto al LHS mi ritrovo come esponente  $p_{k+1}$

$$\|u\|_{L^{p_{k+1}}}^{r+1} \leq \|u\|_{L^{p_k}}^r \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\stackrel{\substack{\text{stima impura} \\ \text{per ipotesi} \\ \text{induttiva}}}{\leq} C(p, d, k) \|u\|_{1,p,\mathbb{R}^d}^r \underbrace{\|\nabla u\|_{L^p}}_{\leq \|u\|_{1,p,\mathbb{R}^d}}$$

Basta estrarne radice  $(r+1)$ -esima  
 — o — o —

Oss. Provando a scrivere esplicitamente le costanti, si vede che divergono quando  $k \rightarrow +\infty$  ( $q \rightarrow +\infty$ )

Oss. L'impurezza nasce nel passo base, il passo induttivo sarebbe puro.  
 — o — o —