

Lemma (GAGLIARDO 1959) (Caso particolare di disug. di BRASCAMP-LIEB)

Sia $d \geq 2$ un intero.

Per ogni $i = 1, \dots, d$ sia $\varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$

e sia $P_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ la proiezione che dimentica la componente i -esima.

Poniamo

$$\varphi(x) := \prod_{i=1}^d \varphi_i(P_i x)$$

Allora vale la stima

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|\varphi_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}$$

Tocchiamo con mano:

$$d=2 \quad \varphi(x, y) = \varphi_1(y) \varphi_2(x)$$

$$d=3 \quad \varphi(x, y, z) = \varphi_1(y, z) \varphi_2(x, z) \varphi_3(x, y)$$

Dim Induzione su d . Wlog assumo $\varphi_i \geq 0$

$d=2$ Facile

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(y) \varphi_2(x) dx dy = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(y) dy \right\} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(x) dx \right\}$$

Per capire il passo induttivo, facciamo esplicitamente il caso da $d=3$ a $d=4$.

In questo caso

$$\varphi(x, y, z, w) = a(y, z, w) b(x, z, w) c(x, y, w) d(x, y, z)$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x, y, z, w) dx dy dz dw$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d(x, y, z) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} a(y, z, w) b(x, z, w) c(x, y, w) dw \right)}_{\phi(x, y, z)} dx dy dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d(x, y, z) \underbrace{\phi(x, y, z)}_{\frac{2}{3}} dx dy dz$$

$$\leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^3} d(x, y, z)^3 dx dy dz \right\}^{1/3}}_{\|d\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \text{ ☺}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x, y, z)^{3/2} dx dy dz \right\}^{2/3}}_{\text{resto}}$$

Basta dimostrare che $\text{resto} \leq \|a\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \|b\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \|c\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}$
 Ora

$$\phi(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{a(y, z, w)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{b(x, z, w)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{c(x, y, w)}_{\frac{1}{3}} dw$$

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z, w)^3 dw \right\}^{1/3} \left\{ \int_{\mathbb{R}} b^3 \dots \right\}^{1/3} \left\{ \int_{\mathbb{R}} c^3 \dots \right\}^{1/3}$$

E lo elevo alla $3/2$ e ottengo

$$\phi(x, y, z)^{3/2} \leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z, w)^3 dw \right\}^{1/2}}_{A(y, z)} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} b^3 dw \right\}^{1/2}}_{B(x, z)} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} c^3 dw \right\}^{1/2}}_{C(x, y)}$$

Ora devo fare

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi(x, y, z)^{3/2} dx dy dz \leq \int_{\mathbb{R}^3} A(y, z) B(x, z) C(x, y) dx dy dz$$

Usando l'ipotesi induttiva

$$\text{LHS} \leq \text{RHS} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} A(y, z)^2 dy dz \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} B^2 \dots \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} C^2 \dots \right)^{1/2}$$

Ora

$$\int_{\mathbb{R}^2} A(y, z)^2 dy dz = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} a(y, z, w)^3 dw \right) dy dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} a(y, z, w)^3 dy dz dw$$

$$= \|a\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^3$$

Il cubo deve elevarlo alla $\frac{1}{2}$ e poi alla $\frac{2}{3}$ 😊

Vero passo induttivo $d \Rightarrow d+1$ $x = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1})$

Indico con $\hat{x}_i$ quello privato della componente i
 $\hat{x}_{i, d+1}$ " " delle componenti i e $d+1$.

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \prod_{i=1}^{d+1} \varphi_i(\hat{x}_i) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1}) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i) dx_{d+1} \right)}_{\Phi(\hat{x}_{d+1})} d\hat{x}_{d+1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1}) \Phi(\hat{x}_{d+1}) d\hat{x}_{d+1}$$

$$\leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1})^d d\hat{x}_{d+1} \right\}^{1/d}}_{\|\varphi_{d+1}\|_{L^d(\mathbb{R}^d)} \text{ 😊}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}} d\hat{x}_{d+1} \right\}^{\frac{d-1}{d}}}_{\text{resto}}$$

Come prima serie

$$\text{resto} \leq \prod_{i=1}^d \|\varphi_i\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}$$

Ora

$$\begin{aligned}\Phi(\hat{x}_{d+1}) &= \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i) d x_{d+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\varphi_1(\hat{x}_1)}_{\frac{1}{d}} \dots \underbrace{\varphi_d(\hat{x}_d)}_{\frac{1}{d}} d x_{d+1} \\ &\leq \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(\hat{x}_i)^d d x_{d+1} \right\}^{1/d}\end{aligned}$$

Elevando

$$\Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{i=1}^d \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(\hat{x}_i)^d d x_{d+1} \right\}^{\frac{1}{d-1}}}_{\Phi_i(\hat{x}_{i,d+1})}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}} d \hat{x}_{d+1} &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d \Phi_i(\hat{x}_{i,d+1}) d \hat{x}_{d+1} \\ (\text{ipotesi induttiva}) &\leq \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Phi_i(\hat{x}_{i,d+1})^{d-1} d \hat{x}_{i,d+1} \right\}^{\frac{1}{d-1}}\end{aligned}$$

Ora basta osservare che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Phi_i(\hat{x}_{i,d+1})^{d-1} d \hat{x}_{i,d+1} &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(\hat{x}_i)^d d x_{d+1} d \hat{x}_{i,d+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(\hat{x}_i)^d d \hat{x}_i\end{aligned}$$

Basta osservare che gli esponenti se ne valgono.

Osservazioni in stile riscalamento

Prendiamo le immersioni per $p < d$:

$$\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^d)} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Se questa vale, allora per forza p_* è quello dato dalla formula.

Se vale per $u(x)$, vale per $\lambda u(x)$.

Se vale per $u(x)$, deve valere pure per $u(\lambda x)$. Come riscaliamo in funzione di λ , LHS e RHS?

$$\|u(\lambda x)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} u(\lambda x)^q dx \right\}^{1/q}$$

$$\begin{aligned} \lambda x &= y \\ dx &= \frac{1}{\lambda^d} dy \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{1}{\lambda^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(y)^q dy \right\}^{1/q}$$

$$= \lambda^{-\frac{d}{q}} \|u(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$$

Per il RHS osserviamo che $\nabla[u(\lambda x)] = \lambda \nabla u(\lambda x)$ e quindi

$$\|\nabla[u(\lambda x)]\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\lambda|^p \|\nabla u(\lambda x)\|^p dx \right\}^{1/p}$$

$$= \lambda^{1-\frac{d}{p}} \|\nabla u(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Ma allora LHS $\leq$ RHS diventa

$$\lambda^{-\frac{d}{q}} \|u(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \lambda^{1-\frac{d}{p}} \|\nabla u(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Portando tutto dalla stessa parte viene

$$\lambda^{\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q}} \|u\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$$

Se l'esponente di λ è $\neq 0$, allora ho guai per $\lambda \rightarrow 0^+$ o per $\lambda \rightarrow +\infty$. Quindi

$$\frac{d}{p} = 1 + \frac{d}{q}, \text{ cioè } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{d} \quad \text{😊}$$

Con un ragionamento analogo si trova l'ordine di Hölderianità per $p > d$.

Allo stesso modo si fanno i controesempi alle disug. impure quando siamo fuori dal range.

Esercizio Vale una disug. del tipo

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x,y) b(y,z) dx dy dz \leq \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|b\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}$$

Se funziona per $a(x,y)$ e $b(y,z)$, deve funzionare

- per $a(\lambda x, y)$ e $b(y, z)$ $\frac{1}{\lambda}$ $\frac{1}{\lambda^{1/p}} \rightsquigarrow p=1$
- per $a(x, y)$ e $b(y, \lambda z)$ $\frac{1}{\lambda}$ $\frac{1}{\lambda^{1/q}} \rightsquigarrow q=1$
- per $a(x, \lambda y)$ e $b(\lambda y, z)$ $\frac{1}{\lambda}$ $\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \rightsquigarrow \text{☹️}$

[Aggiunto dopo video : l'esercizio era capire se vale la disuguaglianza e la risposta è negativa perché i 3 diversi riscalamenti danno condizioni incompatibili su p e q]