

TEOREMI DI IMMERSIONECaso base su tutto lo spazio $d \geq 1$ intero, $p \in [1, +\infty]$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Allora ci sono 3 casi.

$\Omega = \mathbb{R}^d$

Caso $p < d$ si ha che $u \in L^{p_*}(\mathbb{R}^d)$ dove p_* risolve

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_*} = \frac{1}{d}$$

cioè

$$p_* = \frac{dp}{d-p}$$

e vale la stima

$$\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Disug. pura: al
RHS c'è il solo
gradienteIn particolare $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $q \in [p, p_*]$ e vale

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p, q) \|u\|_{1,p, \mathbb{R}^d}$$

Disug. impura: al
RHS c'è la "full
norm in $W^{1,p}$ "Caso $p = d$ si ha che $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $q \in [p, +\infty)$ e

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, q) \|u\|_{1,p, \mathbb{R}^d}$$

impura

↑
esclusoCaso $p > d$ si ha che $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e vale

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(p, d) \|u\|_{1,p, \mathbb{R}^d}$$

pura

Inoltre u è α -Hölderiana con $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ (Lip. se $p = +\infty$)
e vale la stima

$$|u(y) - u(x)| \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |y - x|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

costante di
 α Hölder

PURA

Caso iterato su tutto lo spazio

$d \geq 1$ intero, $m \geq 1$ intero, $p \in [1, +\infty]$, $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

Caso $mp < d$ Si ha che $u \in L^{p_*(m)}(\mathbb{R}^d)$ dove

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_*(m)} = \frac{m}{d} \quad \text{ossia} \quad p_*(m) = \frac{dp}{d - mp}$$

e vale la stima

$$\|u\|_{L^{p_*(m)}(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p, m) \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

PURA

e in particolare per ogni $q \in [p, p_*(m)]$ vale

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p, q, m) \underbrace{\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}_{\|u\|_{p,m,\mathbb{R}^d}}$$

Caso $pm = d$ Si ha che $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $q \in [p, +\infty)$ e vale la stima impura

Caso $pm > d$ Si ha che $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con stima impura.

Inoltre, se R è il più piccolo intero t.c. $pR > d$, allora $u \in C^{m-R}(\mathbb{R}^d)$ e le sue derivate di ordine $m-R$ sono d -Hölderiane con $\alpha = 1 - \frac{d}{pR}$ e vale la stima pura

$$|D^\beta u(y) - D^\beta u(x)| \leq C(p, m, d) \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |x-y|^\alpha$$

per ogni $|\beta| = m - R$.

Dim Inclusione a partire dal caso $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. 😊

Caso base su un aperto

$d \geq 1$ intero, $p \in [1, +\infty]$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Supponiamo che Ω sia abbastanza regolare.

Allora vale tutto come nel caso base, solo che tutte le stime diventano impure, ad esempio

$p < d$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p, d, \Omega) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

$\uparrow \uparrow$

In particolare vale stima simile per $\|u\|_{L^q(\Omega)}$ per ogni $q \in [p, p^*]$ (e anche $q \in [1, p^*]$ se $\text{meas}(\Omega) < +\infty$)

$p = d$

Stessa cosa con tutti i $q \in [p, +\infty)$ $\uparrow \uparrow$ escluso

$p > d$

Immersione in $L^\infty(\Omega)$ e α -Hölderianità
con $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ e stima impura della costante di Hölder.

— o — o —

Caso iterato su un aperto

Tutto come previsto, solo che tutte le stime sono impure.

— o — o —

Oss. Senza regolarità non c'è speranza.

PROBLEMA DELL'ESTENSIONE

Setting: $d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty]$, $m \geq 1$ intero.

Def. ① Un (p, m) -extender è una funzione LINEARE

$$E_{p,m} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$$

tale che

(i) $[E_{p,m}(u)](x) = u(x) \quad \forall x \in \Omega$ (quasi ogni)

(ii) esiste una costante $C(p, m)$ tale che

$$\|E_{p,m}(u)\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq C(p, m) \|u\|_{m,p,\Omega}$$

② Un m -extender è una funzione lineare

$$E_m : L^1_{\text{loc}}(\Omega) \rightarrow L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$$

che ristretta ad ogni $W^{m,p}(\Omega)$ diventa un (m, p) -extender.

③ Un total extender è una funzione lineare come sopra che va bene per ogni (p, m) ammissibile

— o — o —

Fatto base 1 Se Ω ammette u $(1, p)$ -extender, allora vale l'approx. deluxe in $W^{1,p}(\Omega)$.

Dim. Prendo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pongo $\hat{u} := E_{1,p}(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$
 Per approssimazione (basta la low-cost?) esiste

$$\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

tale che

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

$$D^d u_n \rightarrow D^d u \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

e restringendo tutto a Ω ho la tesi. $\nearrow$ (sistemazione nel prossimo futuro)

— o — o —

Fatto base 2 Se Ω ammette u $(1, p)$ -extender, allora valgono le immersioni in Ω , anche quelle iterate con m .
 (basta le $(1, p)$ per avere quelle di ordine qualunque)

Dim. Prendo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, la estendo a $\hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e uso le immersioni per questa.
 In formule

$$\|u\|_{L^{p*}(\Omega)} = \|\hat{u}\|_{L^{p*}(\Omega)} \leq \|\hat{u}\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^d)}$$

$\uparrow$ $u = \hat{u}$ su Ω
 $\uparrow$
insieme più grande

$$\leq C(p, d) \|\nabla \hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C(p, d, \Omega) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

$\uparrow$ immersione base
 $\uparrow$
stima per l' $(1, p)$ -extender

Discorso analogo per tutte le altre stime.

Il caso con $W^{m,p}$ si dimostra per induzione su m a partire da $m=1$.

— o — o —