

Teorema $H=W$ (Meyers-Serrin 1964)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ qualunque e sia $u \in W^{m,p}(\Omega)$ con $m \geq 1$ e $p < +\infty$.
 Allora esiste $\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$\begin{aligned} u_m &\rightarrow u && \text{in } L^p(\Omega) \\ D^\alpha u_m &\rightarrow D^\alpha u && \text{in } L^p(\Omega) \text{ per ogni } |\alpha| \leq m. \end{aligned}$$

Lemma fastidioso (Sobolev. $C_c^\infty = \text{Sobolev}$)

Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, allora $u\psi \in W^{m,p}(\Omega)$ e vale per $D^\alpha(u\psi)$ la formula che uno vorrebbe.

PARTIZIONE DELL'UNITÀ DI TIPO A

Lemma Sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto. Sia $\{A_k\}$ una succ. di aperti tali che

- (i) $A_k \subset\subset A$
- (ii) A_k ricoprono A nel senso che

[Nel video qualche A si chiama per errore Ω 😊]

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A$$

- (iii) il ricoprimento è loc. finito, cioè per ogni compatto $K \subseteq A$ si ha che

$$\{k \in \mathbb{N} : A_k \cap K \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

Allora esiste una succ $\{\psi_k\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

- $\psi_k \in C_c^\infty(A_k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$
- $\psi_k(x) \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^d$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) = 1$ per ogni $x \in A$.

Oss. Fissato $x \in A$, la serie è una somma finita

(qui basta ricopr. punt. finito) [Puntualmente corretto dopo video]

— o — o —

Dim di $H = W$ Sia $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Se per caso u ha supp. compatto in Ω , allora la tesi è banale (basta usare le convoluzioni come nel low-cost)

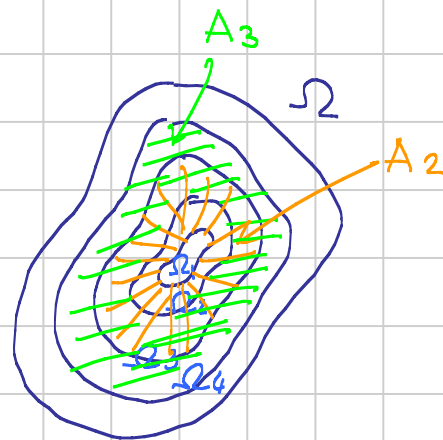
Altrimenti per ogni $k \geq 1$ pongo

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega : |x| < k, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\}$$
$$\bar{B}(x, \frac{1}{k}) \subseteq \Omega$$

Per solidarietà pongo $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$
Poniamo

$$A_k := \Omega_{k+1} \setminus \text{Clos}(\Omega_{k-1}) \quad \forall k \geq 1$$

$$B_k := \Omega_{k+2} \setminus \text{Clos}(\Omega_{k-2}) \quad \forall k \geq 1$$



Gli $\{A_k\}$ verificano le ipotesi del lemma di partizione dell'unità [Verificarlo!]

Sia $\{\varphi_k\}$ la corrispondente partizione.

Allora osservo che, posto $u_k = u \cdot \varphi_k$ si ha che

- u_k ha supporto compatto in Ω ($\text{supp } u_k \subseteq A_k \subset \subset \Omega$)

- $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ (somma finita aol x fisso)

Obiettivo: dato $\varepsilon > 0$ voglio trovare $v \in C^\infty(\Omega)$ t.c.

$$\|u - v\|_{m,p,\Omega} \leq \varepsilon$$

Poiché le u_k hanno supporto compatto, allora per ogni k esiste v_k tale che

$$\|u_k - v_k\|_{m,p,\Omega} \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$$

Dove sta v_k ? Di sicuro posso assumere che $v_k \in C^\infty(\Omega)$
e che anzi $v_k \in C_c^\infty(B_k)$

↑ volendo potrei arrivare pure ad A_k

Pongo

$$v(x) := \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$$

e osservo che

- converge perché è puntualmente finita
- è di classe $C^\infty(\Omega)$ perché la somma è loc. finita (in ogni $B(x,r) \subset \Omega$ è somma di numero finito di funzioni C^∞)

Dico che v va bene perché

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{m,p,\Omega} &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} u_k - v_k \right\|_{m,p,\Omega} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k - v_k\|_{m,p,\Omega} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Sublemma Sia $\{A_k\}$ come nella partizione dell'unità.
Allora per ogni k esiste $\hat{A}_k$ tale che

- $\hat{A}_k \subset A_k$
- $\{\hat{A}_k\}$ sono ancora un ricoprimento.

Dim. Basta far vedere che posso risparmiare su A_1 e reiterare il procedimento.

Per ogni $m \geq 1$ intero posso

$$A_{1,m} := \{x \in A_1 : \text{dist}(x, \partial A_1) \geq \frac{1}{m}\}$$

e osservo che $A_{1,m} \subset A_1$ per ogni m .

Dico che per m abbastanza grande posso usare $A_{1,m}$ invece di A_1 . Ci sono almeno due dimostrazioni:

• Per assurdo non sia così. Allora per ogni $m \geq 1$ esiste

$$x_m \in A \setminus (A_{1,m} \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots)$$

Dove sta x_m ? Sta in A e non in $A_2, A_3, \dots$, quindi

$$x_m \in A_1$$

Inoltre $x_m \notin A_{1,m}$, quindi $\text{dist}(x_m, \partial A_1) \leq \frac{1}{m}$.

Ora, a meno di s.succ, $x_m \rightarrow x_\infty \in \overline{A_1} \subset A$
 $\uparrow$ compatto

Passando al limite da dist. ho che $x_\infty \in \partial A_1$, ma allora $x_\infty \notin A_1$ che è aperto, ma allora $x_\infty \in A_2 \cup A_3 \cup \dots$ che però è aperto, e quindi anche x_m per m grande ci sta dentro.

• Posso $B_m := A_{1,m} \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$

Se uno di questi ricopre $\text{Clos}(A_1)$ è fatta

Ma questo è un ricoprimento aperto di un compatto.

— o — o —

DIM PARTIZIONE DI UNITÀ

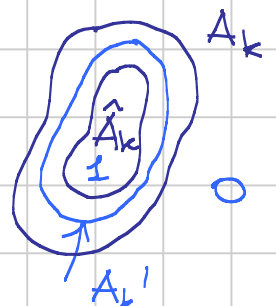
Dato $\{A_k\}$ prendo gli $\{\hat{A}_k\}$ come nel sublemma.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ dico che esiste $\theta_k \in C_c^\infty(A_k)$

che è ≥ 0 e vale 1 su $\hat{A}_k$.

[Fisso $\hat{A}_k \subset A_k' \subset A_k$ e poi prendo

$\mathbb{1}_{A_k'} \neq 0$ per ε piccolo]



Dati tutti i ϑ_k , possiamo

$$S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k(x) > 0 \quad \text{in } A$$

$\uparrow$ C^∞ perché loc. finita $\nwarrow$ perché $\hat{A}_k$ ricoprono A

e infine

$$\psi_k(x) := \frac{\vartheta_k(x)}{S(x)} \in C_c^\infty(A_k)$$

$\uparrow$ grazie al numeratore
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Dim. Lemma fastidioso Tesi : $u\psi \in W^{m,p}$ Inoltriamo su u

$\uparrow$ C_c^∞

Passo $m=1$

$$\int_{\Omega} u\psi D_{x_i} \varphi = \int_{\Omega} u D_{x_i} [\overbrace{\psi\varphi}^{\in C_c^\infty}] - \int_{\Omega} u \varphi D_{x_i} \psi$$

$\uparrow$

$$D_{x_i} [\psi\varphi] = D_{x_i} \psi \cdot \varphi + \psi \cdot D_{x_i} \varphi$$

$$= - \int_{\Omega} D_{x_i} u \cdot \psi \varphi - \int_{\Omega} u D_{x_i} \psi \varphi$$

$$= - \int_{\Omega} \{ \underbrace{D_{x_i} u \cdot \psi}_{\in L^p} + u \underbrace{D_{x_i} \psi}_{\in L^p} \} \varphi$$

[Segue corretto dopo video]

$m \Rightarrow m+1$ Sia α con $|\alpha| = m+1$. Tiro fuori un D_{x_i} in modo che

$$D^\alpha = D_{x_i} D^\beta \quad \text{con } |\beta| = m$$

e faccio il conto

$$\int_{\Omega} u\psi D^\alpha \varphi = \int_{\Omega} u\psi D_{x_i} D^\beta \varphi$$

$$= \int_{\Omega} u D_{x_i} (\psi D^\beta \varphi) - \int_{\Omega} u D_{x_i} \psi D^\beta \varphi$$

$$= - \int_{\Omega} \underbrace{Dx_i u \cdot \varphi}_{\in W^{m,p}} D^B \varphi - \int_{\Omega} \underbrace{u \cdot \overbrace{Dx_i \varphi}^{\in C^\infty}}_{\in W^{m,p}} D^B \varphi$$

$$= (-1)^{\overbrace{1+|\beta|}^{m+1}} \int_{\Omega} \text{Mostro} \cdot \varphi + (-1)^{\overbrace{1+|\beta|}^{m+1}} \int_{\Omega} \text{Mostro} \cdot \varphi$$

e questo è quello che volevo.

— o — o —