

MOLLIFICATORI

Un mollificatore è una funzione $\rho: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) un po' di regolarità, ad esempio $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

(ii) $\rho(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$

(iii) $\rho(x) = 0$ se $|x| \geq 1$

(iv) vale

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1$$

$\uparrow B(0,1)$

CONVOLUZIONE

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e sia $\rho: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un mollificatore.

Per ogni $\varepsilon > 0$ si pone

$$x + \varepsilon y = z$$

$$(u * \rho_\varepsilon)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x + \varepsilon y) \rho(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} u(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon^d} dz$$

$\uparrow B(0,1)$ $\uparrow B(x,\varepsilon)$

Se $u \in L^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, allora si può definire allo stesso modo dopo aver esteso u a 0 fuori di Ω , cioè

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases}$$

e poi pongo $\hat{u} * \rho_\varepsilon$.

— o — o —

Teorema Sia $\mu \in L^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, sia ρ mollific.
e sia

$$\mu_\varepsilon(x) := (\hat{\mu} * \rho_\varepsilon)(x)$$

$\uparrow$ estesa

Allora valgono i seguenti fatti.

(i) $\mu_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ se $\rho \in C^\infty$

(ii) il supporto di μ_ε è contenuto in

$$\Omega_\varepsilon := \bigcup_{x \in \Omega} \overline{B}(x, \varepsilon)$$

(iii) se $\mu \in L^p(\Omega)$ per un certo $p \in [1, +\infty]$, allora $\mu_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^d)$
e vale

$$\|\mu_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\mu\|_{L^p(\Omega)}$$

(iv) la convoluzione è lineare

(v) se $\mu \in L^p(\Omega)$ per un certo $p \in [1, +\infty)$ allora

$$\mu_\varepsilon \rightarrow \mu \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d) \text{ e } L^p(\Omega)$$

Oss. (v) è senza speranza per $p = +\infty$: pensare a una
funzione costante in un intervallo.

— o — o —

Proposizione (La convoluzione commuta con le deriv. w-deboli)

Siano $A \subset B \subset \mathbb{R}^d$ due aperti. Siano $u \in L^1(B)$ e $v \in L^1(B)$.
Sia ρ mollificatore C^∞ .

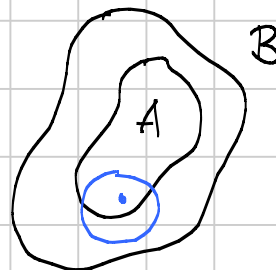
Supponiamo che $v = D^\alpha u$ in senso w per un certo α multiind.
Sia

$$\varepsilon_0 := \text{dist}(A, \partial B)$$

Allora per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ vale che

$$D^\alpha [u * \rho_\varepsilon](x) = [v * \rho_\varepsilon](x) \quad \forall x \in A$$

le convoluzioni sono fatte dopo aver esteso a 0 fuori di B



Dim. Facciamo il conto

$$D_x^\alpha [\hat{u} * \rho_\varepsilon](x) \stackrel{\text{def}}{=} D_x^\alpha \left[\frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d = B(x, \varepsilon)} \hat{u}(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) dz \right]$$

$$\stackrel{\text{deriv. sotto segno int}}{\rightarrow} = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d = B(x, \varepsilon)} \hat{u}(z) D_x^\alpha \left[\rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) \right] dz$$

$$\stackrel{\text{chain rule}}{\rightarrow} = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(z) [D^\alpha \rho] \left(\frac{z-x}{\varepsilon} \right) \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{|\alpha|}} dz$$

$$\stackrel{\text{chain rule}}{\rightarrow} = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(z) D_z^\alpha \left[\rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) \right] dz$$

ρ ha supporto compatto in B

$$\stackrel{v = D^\alpha u \text{ in } B}{\rightarrow} = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d = B(x, \varepsilon)} \hat{v}(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) dz$$

$$\stackrel{\text{defin.}}{\rightarrow} = (\hat{v} * \rho_\varepsilon)(x)$$

Se $x \in A$, allora $\underline{B(x, \varepsilon)} \subseteq B$ e quindi i cappucci usati sono

Approx Low cost per Sobolev

Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e $p < +\infty$, allora esiste $\{u_\varepsilon\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ in } L^p(\Omega) \\ D^\alpha u_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \text{ in } L^p_{loc}(\Omega) \text{ per ogni } |\alpha| \leq m.$$

Dim. Basta porre $u_\varepsilon := (\hat{u} * \rho_\varepsilon)$. Allora

$$u_\varepsilon \rightarrow u \text{ in } L^p(\Omega)$$

$$(D^\alpha u) * \rho_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \text{ in } L^p(\Omega)$$

ma non è vero
che $(D^\alpha u) * \rho_\varepsilon =$
 $= D^\alpha (u * \rho_\varepsilon)$ su
tutto Ω

Ma allora per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ vale che

$$(D^\alpha u) * \rho_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \text{ in } L^p(\Omega')$$

" $\leftarrow$ vale su Ω' quando ε
 $D^\alpha u_\varepsilon$ è abbastanza piccolo
— o — o —

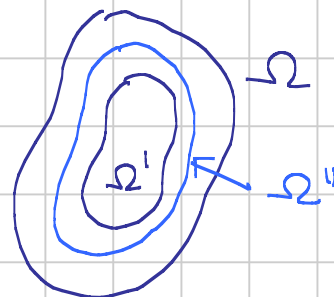
Teorema $W \Rightarrow H$ per le derivate deboli

Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $v = D^\alpha u$ in senso W , allora esiste $\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tale che

- $u_m \rightarrow u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$,
- $D^\alpha u_m \rightarrow v$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Dim. **Step 1** Fisso $\Omega' \subset\subset \Omega$ e accontento dei.

Fisso Ω'' con $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$
(spiegare bene perché si può fare)



Estendo u a $\hat{u}$ che vale 0 fuori di Ω'' e pongo

$$u_\varepsilon = \hat{u} * \rho_\varepsilon$$

Come sopra abbiamo che

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{in } L^1(\Omega'') \quad \text{e quindi anche in } L^1(\Omega')$$

$$D^d u_\varepsilon = (D^d u) * \rho_\varepsilon \rightarrow D^d u \quad \text{in } L^1(\Omega')$$

$\uparrow$
vale solo
in Ω' per
 ε piccolo

$\uparrow$
vale anche
in $L^1(\Omega'')$ con opportuni cappucci

Prendendo $\varepsilon_n \rightarrow 0$ abbiamo la tesi per Ω'

Step 2 Voglio una u_n che va bene per ogni Ω' .

Per ogni intero $k \geq 1$ pongo

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : |x| < k \text{ e } \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$$

$$\overline{B}(x, \frac{1}{k}) \subseteq \Omega$$

$\uparrow$ chiusura aggiunta dopo video

Osservo che

- $\Omega_k \subset \subset \Omega$ per ogni k
- per ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$ si ha che $\Omega' \subset \subset \Omega_k$ definitivamente.

[Dimostrarlo !!]

Per ogni k so approssimare Ω_k , ma non posso chiudere con un procedimento diagonale.

Per ogni k posso trovare, grazie allo step 1, una funzione u_k tale che

$$\|u - u_k\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k}$$

$$\|D^d u - D^d u_k\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k}$$

$\nwarrow$ qualunque succ. che
va a 0 va bene
 $\swarrow$

Dico che $\{u_k\}$ approssima ogni Ω' .

Infatti definitivamente vale che $\Omega' \subseteq \Omega_k$ e quindi

$$\|u - u_k\|_{L^1(\Omega')} \leq \|u - u_k\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k}$$

e idem per le derivate α -esime.

— o — o —

Oss. Se u e $D^\alpha u$ erano un po' meglio, diciamo $L^p_{loc}(\Omega)$ con $p < +\infty$, allora le convergenze sono in L^p_{loc} .

Oss. Abbiamo assunto solo che $D^\alpha u$ esista per un certo fissato α .

— o — o —