

TEOREMI ALGEBRICI

→ Prodotto

→ Composizione fuori

→ Valore assoluto

→ Composizione dentro

Prodotto $d \geq 1, m=1, \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, p \in [1, +\infty]$

Siano

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

$$v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

Allora

$$uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

i prodotti sono ben definiti perché
 $u, v \in L^\infty$

(in dim 1 è GRATIS)

Dim Idea: $u_n \rightarrow u \quad v_n \rightarrow v$

$$D_{x_i} u_n \rightarrow D_{x_i} u$$

$$D_{x_i} v_n \rightarrow D_{x_i} v$$

e spera che

$$u_n v_n \rightarrow uv$$

$$D_{x_i}(u_n v_n) = D_{x_i} u_n \cdot v_n + D_{x_i} v_n \cdot u_n \rightarrow D_{x_i} u \cdot v + D_{x_i} v \cdot u$$

↑ Formula classica

per funzioni regolari

Dettagli $p < +\infty$ Se voglio usare Meyers-Serrin, la convergenza delle prime 2 righe sono in $L^p(\Omega)$ e quindi, a meno di s.succ., puntuale q.o. + dominata.A questo p.to anche la convergenza successive sono puntuale q.o. + dominata, dunque in $L^p(\Omega)$.Importante, se u e v sono in L^∞ , oltre che in $W^{1,p}$, posso

sempre assumere che le u_n e le v_n sono in L^∞ con la stessa costante.

In realtà basta il low-cost, dal quale dedurrei quello che voglio in ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$, ma essendo Ω' arbitrario, questo basta.

Dettagli per $p = +\infty$ Qui non ci sono ϵ_0 di approx.

Ora per ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$ abbiamo che $u, v \in W^{1,2019}(\Omega')$

Dal caso precedente deduco che
 $uv \in W^{1,2019}(\Omega')$

e ottengo approssimanti

$$\left. \begin{array}{l} u_n v_n \rightarrow uv \\ D_{x_i}(u_n v_n) \rightarrow D(uv) \end{array} \right\} \text{ in } L^{2019}(\Omega') + \text{ puntuale q.o.}$$

Inoltre le approx u_n e v_n e le relative derivate sono in L^∞ con costanti limitate, dunque i limiti stanno in $L^\infty(\Omega')$.

Essendo Ω' arbitrario, abbiamo finito.

Oss. Quello che ci sta sotto è

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow u_\infty \text{ in } L^{2019} \\ \|u_n\|_{L^\infty} \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow u_\infty \in L^\infty$$

↑
a meno di s.sua.
è puntuale q.o.

Composizione fuori Setting come prima, $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) $\varphi(0) = 0$ (non serve se $\text{meas}(\Omega) < +\infty$)

(ii) $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$

(iii) $|\varphi'(x)| \leq L$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Allora

$$\varphi(u) \in W^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\nabla[\varphi(u)] = \varphi'(u) \nabla u$$

$$D_{x_i}[\varphi(u)] = \varphi'(u) D_{x_i} u$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $L^\infty \quad L^p$

Dim. Solita idea $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$ + puntuale
 $D_{x_i} u_n \rightarrow D_{x_i} u$ in $L^p(\Omega')$ dominata

Spero tanto che

$$\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u)$$

$$\varphi'(u_n) D_{x_i} u_n \rightarrow \varphi'(u) D_{x_i} u$$

puntuale q.o. dominato, e quindi in $L^p(\Omega) \circ L^p(\Omega')$

La puntuale q.o. è gratis per continuità di φ e φ' .

La dominazione segue

$$|\varphi(u_n(x))| = |\varphi(u_n(x)) - \varphi(0)| \leq L |u_n(x)|$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
(i) (iii)

$$|\varphi'(u_n(x))| \cdot |D_{x_i} u_n(x)| \leq L |D_{x_i} u_n(x)|$$

Questo completa la dim. per $p < +\infty$.

Nel caso $p = +\infty$ ci si basa su L^{2019} .

— o — o —

Oss. Con le derivate successive le cose peggiorano, anche in una variabile

$$(\sin u)' = \dot{u} \cos u$$

$$(\sin u)'' = -\dot{u}^2 \sin u + \ddot{u} \cos u$$

$\uparrow\uparrow$ $\uparrow$
 qui si qui ok
 dimostra la sommabilità
 — 0 — 0 —

Valore assoluto Solito setting. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$[D_{x_i} |u|](x) = \text{sign}(u(x)) \cdot D_{x_i} u(x)$$

Dim. Approssiamo il valore assoluto, con φ_n . Pongo

$$\varphi_n(\sigma) := \sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}$$

Si verifica che $\varphi_n(0) = 0$ e $|\varphi_n'(\sigma)| \leq 1$ e

$$\begin{aligned} \varphi_n(\sigma) &\rightarrow |\sigma| & \forall \sigma \in \mathbb{R} \\ \varphi_n'(\sigma) &\rightarrow \text{sign}(\sigma) & \forall \sigma \neq 0. \\ &\rightarrow 0 & \text{se } \sigma = 0 \end{aligned}$$

Per la composizione fuori sappiamo che $\varphi_n(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$D_{x_i} [\varphi_n(u)] = \varphi_n'(u) D_{x_i} u$$

Inoltre $\varphi_n(u(x)) \rightarrow |u(x)| \quad \forall x \in \Omega$

$$\varphi_n'(u) D_{x_i} u \rightarrow \text{sign}(u(x)) \cdot D_{x_i} u$$

Uso stabilità per passaggio al limite (ho tutte le dominazioni che servono).

Oss. Il max / min tra 2 funzioni Sobolev è Sobolev, quindi in particolare le troncature di una Sobolev sono Sobolev!

$$\left[\max\{\alpha, \beta\} = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} \right]$$

Composizione dentro Solito setting, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^d$ qualunque
Sia data $\varphi: \Omega' \rightarrow \Omega$ di classe C^2 .
Allora

$$v(x) = u(\varphi(x)) \in W^{1,p}(\Omega')$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i}$$

componente j -esima di φ

o in modo più compatto

$$\nabla v(x) = \nabla u(\varphi(x)) \underbrace{J\varphi(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{matrice jacobiana}}}$$

Dim Come sempre approssimo u e poi ritrovo una approx nel senso giusto di v .

[Sarebbe qualche ipotesi, del tipo jacobiano limitato].

[Dopo video: l'ultimo teorema è molto impreciso. Sarebbe in realtà che $J\varphi$ e $J(\varphi^{-1})$ siano limitate. Spero di riprenderlo più avanti con maggiori dettagli]