

DERIVATE DEBOLI

Setting generale :

- $d \geq 1$ intero (dimensione)
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto qualunque
- $m \geq 1$ intero (ordine di derivazione)
- $p \in [1, +\infty]$ estremi compresi

Notazione dei multiindici (vedi Analisi 2) :

$$\alpha \in \mathbb{N}^d \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$$

Se $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

Def. (Derivata debole, defn. w)

Setting come sopra, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $v \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Si dice che v è la derivata α -esima di u in senso debole se

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

In tal caso scriviamo

$$v = D^\alpha u \quad \text{in senso } \overset{\text{weak}}{\uparrow} \text{ w-debole}$$

Oss. È come dire che v gioca il ruolo di $D^\alpha u$ nell'int. per parti.

Proprietà facili

① Unicità Se u_1 e u_2 sono due deriv. deboli, allora

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_1 \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_2 \varphi$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (u_1 - u_2) \varphi = 0 \quad \text{FLCV} \Rightarrow u_1 = u_2 \text{ q.o.}$$

② Linearità

③ Compatibilità facile classica Se $u \in C^m(\Omega)$, allora u ammette derivata α -esima W debole per ogni $|\alpha| \leq m$ e sono quelle classiche

④ Se $v = D^{\alpha} u$ in senso W in Ω , allora le restrizioni ad $\Omega' \subseteq \Omega$ hanno la stessa proprietà

⑤ Se $v = D^{\alpha} u$ in ogni aperto $\Omega' \subset \subset \Omega$, allora $v = D^{\alpha} u$ in Ω .

Data $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, basta prendere $\Omega' \subset \subset \Omega$ che contiene il supporto φ .

Prop. (stabilità per passaggio al limite)

Solito setting. Sia $\{u_m\} \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$ e $\{v_m\} \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$.

Supponiamo che

(i) $v_m = D^{\alpha} u_m$ in senso W per ogni $m \in \mathbb{N}$

(ii) $u_m \rightharpoonup u_{\infty}$ debole in $L^1(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$,

(iii) $v_m \rightharpoonup v_{\infty}$ " " " "

Allora

$$v_{\infty} = D^{\alpha} u_{\infty}.$$

Dica. Per ogni n vale

$$\int_{\Omega} u_m D^{\alpha} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_m \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

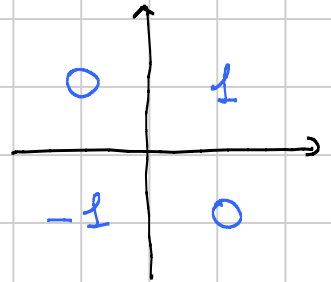
$\downarrow$
 $\downarrow$
 $\nearrow$

uso conv. debole in $L^1(\Omega')$ con $\Omega' \subset\subset \Omega$ che contiene il supp. di φ .

Oss. Stiamo usando ancora meno di L^1 debole come convergenza (le funzioni test sono C_c^∞ e non L^∞).

Achtung! Non vale un discorso del tipo: se $D^\alpha u \in C^0$, allora è una derivata in senso classico

Esempio In $\mathbb{R}^2$ prendiamo u come in figura



Dico che $\mu_{xy} \equiv 0$, ma μ_x e μ_y non esistono

Oss. Vale l'inversione $\mu_{xy} = \mu_{yx}$ (e tutte le altre) per definizione. Per le derivate W- debdi non conta l'ordine

Conto dell'esempio Data $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ calcolo
 $\text{supp } \varphi \subseteq [-R, R]^2$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \varphi_{xy}(x,y) dx dy &= \\ &= \int_{-R}^0 dx \int_{-R}^0 dy [-\varphi_{xy}(x,y)] + \int_0^R dx \int_0^R dy \varphi_{xy}(x,y) \\ &= - \int_{-R}^0 dx \{ \varphi_x(x,0) - \varphi_x(x,-R) \} + \int_0^R dx \{ \varphi_x(x,R) - \varphi_x(x,0) \} \\ &= - \int_{-R}^R \varphi_x(x,0) dx = - \{ \varphi(R,0) - \varphi(-R,0) \} = 0 \end{aligned}$$

Questo dimostra che $u_{xy} \equiv 0$.

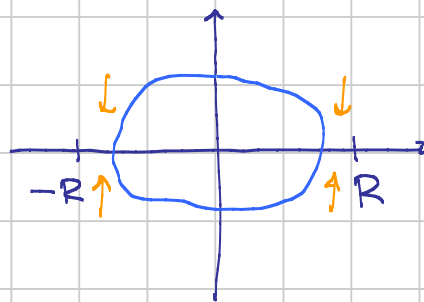
Dimostro che u_y non esiste.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \varphi_y(x,y) dx dy \\ &= \int_{-R}^0 dx \int_{-R}^0 dy (-1) \varphi_y(x,y) + \int_0^R dx \int_0^R dy \varphi_y(x,y) \\ &= - \int_{-R}^0 dx \{ \varphi(x,0) - \varphi(x,-R) \} + \int_0^R dx \{ \varphi(x,R) - \varphi(x,0) \} \\ &= - \int_{-R}^R \varphi(x,0) dx \end{aligned}$$

Vorrei che si potesse scrivere come

$$- \int_{\mathbb{R}^2} v(x,y) \varphi(x,y) dx dy$$

Questo è impossibile che valga per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Se vale per $\varphi(x,y)$, allora vale per



$$\varphi_m(x,y) := \varphi(x, my)$$

$$\int_{-R}^R \varphi_m(x,0) dx = \int_{-R}^R \varphi(x,0) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_m(x,y) v(x,y) dx dy = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) v(x,y) dx dy$$

↑
cambio
di variabili

— 0 — 0 —

Oss. In realtà un giorno u_y esisterà come misura e non dipende da x .

— 0 — 0 —

Def. (Derivata debole, def. H)

Solito setting. Si dice che $v = D^\alpha u$ in senso H se esiste $\{u_n\} \subseteq C^\infty(\Omega)$ (o in $C_c^\infty(\Omega)$, o in $C^{|\alpha|}(\Omega)$) tale che

- $u_n \rightarrow u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$
- $D^\alpha u_n \rightarrow v$ " " } cioè in $L^1(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$.

↑ esistono classiche

Prop. facile ($H \Rightarrow W$)

[Dim.] Stabilità delle derivate in senso W, dopo aver osservato che le $D^\alpha u_n$ sono anche derivate W.

Teorema $W \Rightarrow H$ se $p < +\infty$

Def. (Spazi di Sobolev, def. W)

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}$$

↑ in senso W

Def. (Spazi di Sobolev, def. H) $H^{m,p}(\Omega)$

Due versioni

- Come sopra, solo con derivate in senso H 😊
- Come completamento di $C^{m,p}(\Omega)$ o $C^{\infty,p}(\Omega)$ rispetto alla distanza indotta dalla norma

$$\|u\|_{m,p,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p$$

↑ c'è anche il $\alpha = (0, \dots, 0)$

Si intende che

$$C^{m,p}(\Omega) := \{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p,\Omega} < +\infty\}$$

Facile: • le due varianti di H sono la stessa cosa
• $H \Rightarrow W$

Difficile: $W \Rightarrow H$

— o — o —

ESCLUSO

↓

Teoremi di approssimazione

Siano $d \geq 1$ intero, $m \geq 1$ intero, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty)$.
Sia $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Supponiamo $\Omega \dots$ Allora esiste $\{u_m\} \dots$ t.c.
 $u_m \rightarrow u \dots$ e $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u \dots$

LOW COST	$H = W$ (MEYERS-SERRIN) 1964	DELUXE
Ω qualunque	Ω qualunque	$\partial\Omega$ "regolare"
$\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$	$\{u_m\} \subseteq C^\infty(\Omega)$	$\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$
$u_m \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$	$u_m \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$	$u_m \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$
$D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$ in $L_{loc}^p(\Omega)$	$D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$	$D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$
succ. bella conv. bruttina	succ. passabile conv. bella	succ. bella conv. bella
DIM. FACILE	DIM. DELICATA	DIPENDE DALLE IPOTESI SU $\partial\Omega$.

— o — o —