

Esercizio 1

$$\min \left\{ \int_0^2 \left(u'^2 + \frac{1}{u^2} \right) dx : u(0)=3 \quad u(2)=1 \right\}$$

① Formulazione debole : ok cu H^1 , ma occorre ammettere $+\infty$ tra i possibili valori

② Compattezza Supposto $F(u_n) \leq M$

- subito si ottiene $\|u_n\|_{L^2} \leq M'$
- dalle DBC si ottiene $\|u_n\|_{L^\infty} \leq M''$

Al solito modo, a meno di s.succ., $u_n \rightarrow u_\infty$ unif.
 $u_n \rightarrow u_\infty$

③ SCI • sulla derivata è la solita SCI della norma
 • sulla funzione NON è banale analisi 2, perché l'integrale può essere improprio: $L(x, s, p)$ non è continua in s.

L'idea è usare FATOU : sia $u_n \rightarrow u_\infty$ unif., allora

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{1}{u_n(x)^2} dx &\geq \int_0^2 \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n(x)^2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{u_\infty(x)^2} dx \end{aligned}$$

Oss. Basta la convergenza $u_n \rightarrow u_\infty$ forte in qualche L^p

Dim Sta $I = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{1}{u_n^2} dx$

Sia u_{m_k} la sotto-succ. che realizza il liminf

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{1}{u_{m_k}^2} dx$$

Ora $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ L^p forte, quindi esiste

$u_{m_{k_i}} \rightarrow u_\infty$ puntualmente q.o.

Ora

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{1}{u_m^2} dx \stackrel{\text{def. l}}{=} l \stackrel{\text{scelta di } m_k}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{1}{u_{m_k}^2} dx$$

$$\stackrel{\text{banalità}}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{1}{u_{m_{k_i}}^2} dx \stackrel{\text{S. succ. sui lim.}}{=} \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{1}{u_{m_{k_i}}^2} dx$$

$$\stackrel{\text{Fatou}}{\geq} \int_0^2 \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{u_{m_{k_i}}(x)^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{u_\infty(x)^2} dx$$

conv. punt. q.o.

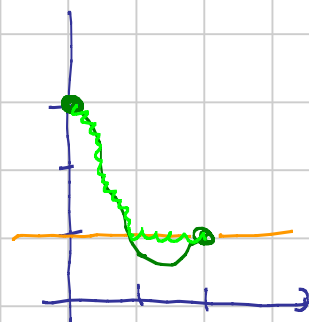
[Aggiunto dopo video: servirebbe un altro passaggio in cui il liminf diventa lim]

④ Per fare ELE dovei calcolare $F(u+t^2)$, ma ci possono essere problemi se u si annulla (potrebbe venire ∞ per ogni $t \neq 0$).

Se dimostrassi che $u_0(x) \geq m > 0$, allora sarebbe tutto ok. Per questo c'è l'argomento di troncamento. Dico che

$$u_0(x) \geq 1 \text{ per ogni } x \in [0, 2]$$

[Se andasse sotto, prendo il 1° attraversamento e prolungo costante finché non torna sopra: guadagno da due parti].



Potevo da subito restringermi alle $u \geq 1$ sempre.

Esempio 2 $\ddot{u} = u^3 + \sin t$

Voglio dimostrare che esiste $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ periodica che la risolve, e magari pure che è unica.

Oss. Il termine u^3 fa paura perché le soluz. possono avere blow up. Non è garantita l'esistenza globale !!

Approccio variazionale Scrivo x invece di t :

$$\ddot{u} = u^3 + \sin x$$

e considero il problema di min

$$\min \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + \sin x \cdot u \right) dx : u(0) = u(2\pi) \right\}$$

Dimostro esistenza e unicità del minimo con metodo diretto

② Compattezza Sia $F(u_n) \leq M$

$$\bullet L(x, s, p) \geq \frac{1}{2} p^2 + \underbrace{\frac{1}{4} s^4 - |s|}_{\text{limit. dal basso}} \geq \frac{1}{2} p^2 - A$$

$\Rightarrow$ limitatezza sulle derivate

$$\bullet L(x, s, p) \geq \frac{1}{4} s^4 - |s| \geq \frac{1}{8} s^4 - B$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} u_n(x)^4 dx \leq M' \Rightarrow |u_n(x_n)| \leq M''$$

e grazie all'Hölderianità equi ottengo

$$|u_n(x)| \leq M''' \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

③ SCI : standard

p.to di cui

④ Regolarità : in modo standard arrivo a $u_0 \in C^2([0, 2\pi])$
e risolve

$$\begin{cases} \ddot{u}_0 = u_0^3 + \sin x \\ u_0(0) = u_0(2\pi) \\ \dot{u}_0(0) = \dot{u}_0(2\pi) \end{cases} \rightarrow \text{nascosto su the road}$$

⑤ Unicità : per il pbm. variazionale segue in modo standard
dalla convessità di $L(x, s, p)$ nella coppia (s, p)
[fine il conto !]

— o — o —

Estendo $u_0(x)$ a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità.

Osservo che si ricolla C^1 , anzi C^2 , perchè $\ddot{u}(x)$ per $x=0$
e $x=2\pi$ li ricavo dall'eq.

Osservo che l'estesa risolve l'equazione ovunque.

Basta verificarlo in ogni intervallo $[2k\pi, (2k+2)\pi]$. Ad esempio
in $[2\pi, 4\pi]$ l'estesa $v(x)$ è $v(x) = u_0(x - 2\pi)$ e questa
risolve

$$\begin{aligned} \ddot{v}(x) &= \ddot{u}_0(x - 2\pi) = u_0(x - 2\pi)^3 + \sin(x - 2\pi) \\ &= v(x)^3 + \sin x \quad \forall x \in [2\pi, 4\pi] \end{aligned}$$

Osservo anche che arrivo a C^∞ per bootstrap
— o — o —

Resta da dimostrare che non esistono soluzioni con periodi
strani

• Non esistono sol. T -periodiche con $T \neq 2k\pi$:

$\sin x = \ddot{u}(x) - u^3(x)$ sarebbe T -periodico !!

• Come escludo soluzioni di periodo 8π ?

→ Considero una sol. di periodo 8π

→ Dimostro che è p.to di min. per il pbm. variazionale in $[0, 8\pi]$

→ Dimostro che risolve ELE e che il min in $[0, 8\pi]$ è unico (convessità)

→ Dimostro che ogni sol. di ELE sarebbe p.to di min.

→ Una sol. di ELE in $[0, 8\pi]$ la conosco già, ed è quella in $[0, 2\pi]$ ripetuta.

— o — o —

Esempio 3

$$F(u) = \int_a^b (5 + \sin x) u^6 dx$$

Se $u_m \rightarrow u_\infty$ posso garantire la SCI?

Detto altrimenti:

$$u_m \xrightarrow[\text{da qualche parte}]{\uparrow} u_\infty \Rightarrow \liminf \int_a^b (5 + \sin x) u_m^6 \geq \int_a^b (\dots) u_\infty^6 ?$$

Risposta: SI e ci sono due strategie

• elementare via convessità $\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)b$

$$\int_a^b (5 + \sin x) \underbrace{\left(\overset{a}{\uparrow} u_\infty + \overbrace{u_m - u_\infty}^b \right)^6}_{\varphi(a+b)} dx \geq \dots$$

qui può tornare utile approx. con φ_ε con derivata limitata.

• Dimostrare che F è convesso (quasi ovvio) + SCI forte (dove? in L^6 è praticamente banale

in L^2 o L^1 segue da Fatou come in esempio precedente).

— o — o —