

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Analisi 2 Siano $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Poniamo

$$K_G := \{x \in \mathbb{R}^d : G(x) = 0\}$$

Teorema Supponiamo che $x_0 \in K_G$ sia un p.to di min./max per F ristretta a K_G , cioè

$$F(x) \geq F(x_0) \quad \forall x \in K_G.$$

Se F e G sono abbastanza regolari (diciamo C^1 in $\mathbb{R}^d$ o in un intorno di x_0), allora vale ALMENO una delle seguenti due possibilità

(i) $\nabla G(x_0) = 0$

(ii) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$, cioè x_0 è p.to stazionario per $F - \lambda G$.

Almeno 3 strategie di dimostrazione:

- via teo. funzioni implicite
- via teo. mappa aperta
- via penalizzazione del vincolo

} (vedi Ser. Analisi 2)

— o — o —

Setting : X sp. affine con V sp. vett. di riferimento

$$F: X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad G: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$K_G := \{x \in X : G(x) = 0\}$$

$$\min \{ F(x) : x \in K_G \}$$

Teorema Setting come sopra.

Sia u_0 un pto di min (per F rispetto a K_G).

Supponiamo che le funzioni

$$\mathbb{R}^2 \ni (t, s) \rightarrow F(u + tv + sw) \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (t, s) \rightarrow G(u + tv + sw) \in \mathbb{R}$$

siano di classe C^1 per ogni $u \in X$, $v \in V$, $w \in V$.

(Basta in realtà in un intorno di $(0,0)$)

Allora vale ALMENO una delle seguenti 2 possibilità:

(i) $\delta G(u_0, v) = 0$ per ogni $v \in V$

(ii) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v) \quad \forall v \in V$$

↑ non dipende da v

cioè $\delta(F - \lambda G)(u_0, v) = 0$ per ogni $v \in V$.

Dim. via teo. funz. implicata

Supponiamo (i) falsa, quindi esiste $w \in V$ t.c. $\delta G(u_0, w) \neq 0$.

Per ogni $v \in V$ considero

$$g(t, s) := G(u_0 + tv + sw)$$

Osservo che $g(0,0) = G(u_0) = 0$ e $g_s(0,0) = \delta G(u_0, w) \neq 0$

Teo. funz. impl. $\Rightarrow \exists \delta: (-\delta_0, \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $g(t, \delta(t)) \equiv 0$
cioè

$$G(u_0 + tv + \delta(t)w) = 0 \quad \forall t \in (-\delta_0, \delta_0)$$

$\in K_G$, quindi è un competitore per il minimo

Pongo

$$\varphi(t) := F(u_0 + tv + \delta(t)w)$$

e osservo che ha minimo per $t=0$, quindi $\varphi'(0)=0$.
D'altra parte

$$\varphi'(0) = \delta F(u_0, v) + \delta F(u_0, w) \dot{\gamma}(0)$$

$$\text{Ora } \dot{\gamma}(0) = - \frac{g_t(0,0)}{g_s(0,0)} = - \frac{\delta G(u_0, v)}{\delta G(u_0, w)}$$

da cui

$$\delta F(u_0, v) - \boxed{\frac{\delta F(u_0, w)}{\delta G(u_0, w)}} \delta G(u_0, v) = 0$$

" λ che non dipende da v "
— 0 — 0 —

Esercizio • Riadattare la dim. via teo. mappa aperta
• Generalizzare a più moltiplicatori
— 0 — 0 —

L'ESEMPIO

$$\min \left\{ \int_0^\pi u(x)^2 dx : u(0) = u(\pi) = 0, \int_0^\pi u(x)^2 dx = 1 \right\}$$

Esistenza via metodo diretto

① Form. debole: tutto ha senso in H^1

② Compattezza: da $F(u_n) \leq M$ deduco $\|u_n\|_{L^2} \leq M$
quindi $u_{n_k} \rightharpoonup v_\infty$

Dalle DBC + Hölderianità ottengo $\|u_n\|_{L^\infty} \leq M'$

Ascoli - Arzelà e il solito "doppio scambio" danno

$$\begin{aligned} u_{n_{k_i}} &\rightarrow u_\infty \\ u_{n_{k_i}} &\rightarrow u_\infty \text{ unif.} \end{aligned}$$

Osserviamo che u_∞ soddisfa DBC + vincolo integrale
(che passa al limite per conv. unif.)

③ SCI : basale sul funzionale

Questo completa l'esistenza.

Cosa risolve il minimo

Voglio applicare i moltiplicatori anche in H^1 con

$$F(u) = \int_0^\pi \dot{u}^2 dx$$

$$G(u) = \int_0^\pi u^2 dx - 1$$

Ci sono 2 possibilità

$$\bullet \delta G(u_0, v) = 0 \rightsquigarrow \frac{d}{dt} G(u_0 + tv) \Big|_{t=0} = 0$$

$$\int_0^\pi u(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty$$

$\Rightarrow u \equiv 0$ e non soddisfa il vincolo

$$\bullet \delta [F - \lambda G](u_0, v) = 0 \rightsquigarrow \dots$$

$$\int_0^\pi [\dot{u}(x) \dot{v}(x) - \lambda u(x) v(x)] dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((0, \pi))$$

$$\text{Al solito modo} \quad \int_0^\pi \dot{u}(x) \dot{v}(x) dx = \int_0^\pi \lambda u(x) v(x) dx$$

$$(u')' = -\lambda u$$

Al solito modo scopro che $u \in C^2$ e risolve

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} = -\lambda u \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \\ \int_0^\pi u^2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{tre condizioni, ma anche} \\ \text{3 parametri liberi} \end{array}$$

Determino segno di λ moltiplicando per u :

$$u \ddot{u} = -\lambda u^2$$

Integro:

$$-\lambda \underbrace{\int_0^\pi u^2(x) dx}_1 = \int_0^\pi u(x) \ddot{u}(x) dx = - \int_0^\pi \underbrace{\dot{u}(x)^2 dx}_{\substack{\uparrow \\ \text{per parti} \\ \text{e i bordi se } u \text{ e } v \text{ a}}}$$

Deoluco che $\lambda > 0$, quindi

$$u(x) = a \sin(\sqrt{\lambda} x) + b \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

Dalle DBC scopro che $b=0$ e $\sqrt{\lambda}=k$, quindi

$$u(x) = a \sin(kx)$$

con $k \in \mathbb{Z}$ e a in maniera tale da aggiustare l'integrale, quindi ho infiniti p.ti che soddisfanno il sistema. Facendo il conto si scopre che il p.to di minimo è

$$u_0(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$$

e il valore minimo è 1.

— 0 — 0 —

Abbiamo così dimostrato che

Disug. alla Póruané

$$\int_0^\pi \dot{u}(x)^2 dx \geq \int_0^\pi u(x)^2 dx \quad \forall u \in H^1((0, \pi)) \\ u(0) = u(\pi) = 0$$

Dom È omogenea, quindi WLOG posso assumere RHS = 1

Un risultato analogo, con costante $\neq 1$, vale su ogni intervallo.

Esempio

$$\min \left\{ \int_0^\pi \{ 3u'^2 - 2u^2 + \sin u \} : u(0) = u(\pi) = 0 \right\}$$

Con il metodo diretto arriviamo alla compattatezza. Una volta serviva

$$L(x, s, p) \geq Ap^2 - B|s|^\alpha - C \quad \text{con } A > 0 \text{ e } \alpha < 2$$

Ma ora $\alpha = 2$ ☹️

Però grazie a Poincaré sappiamo che $\int_0^\pi u'^2 \geq \int_0^\pi u^2$ e quindi

$$F(u) \geq \int_0^\pi (u'^2 + \sin u) dx$$

Quindi da $F(u_n) \leq M$ posso dedurre $\|u_n\|_{L^2} \leq M'$ e poi è storia.

Oss.

$$\sup \left\{ \int_0^\pi 2u'^2 - 3u^2 + \sin u : u(0) = u(\pi) = 0 \right\} = -\infty$$

Una successione infizzante è $u_n(x) = n \sin x$ per cui

$$F(u_n) \sim -n^2 \cdot \text{cost.} \rightarrow -\infty$$

— 0 — 0 —