

PROIEZIONE SU SOTTOSPAZIO VETTORIALE CHIUSO

Setting: H sp. di Hilbert

V sotto sp. vettoriale CHIUSO

Oss. In dim. infinita esistono s.sp. vett. non chiusi, ad esempio lo Span di una base ortonormale

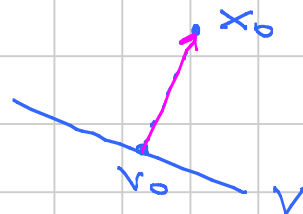
V è convesso, quindi la teoria precedente si applica, dunque $P_V: H \rightarrow V$ è ben definita

Teorema Siano H, V e P_V come sopra.

Allora valgono i seguenti fatti

(1) Caratterizzazione più forte. Per ogni $x_0 \in H$ si ha che $P_V x_0$ è l'unico vettore $v_0 \in V$ tale che

$$\langle x_0 - v_0, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$



(2) $P_V: H \rightarrow V$ è lineare (Linearità)

(3) Il ker di P_V è un sottospazio W chiuso di H e vale

$$H = V \oplus W$$

$$W = V^\perp$$

(Somma diretta ortogonale)

Dim. Dalla caratt. generale sappiamo che

$$\langle x_0 - v_0, y - v_0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in V$$

La uso con $y = \underbrace{v+v_0}_{\in V}$ e $y = \underbrace{-v+v_0}_{\in V}$ con $v \in V$

$$\langle x_0 - v_0, v \rangle \leq 0$$

$$\langle x_0 - v_0, -v \rangle \leq 0$$

quindi è nullo.

(2) Linearità • Devo dim. che $P_V(x_1 + x_2) = P_V x_1 + P_V x_2$

Chi è $P_V(x_1 + x_2)$? È l'unico vettore $v_0 \in V$ tale che

$$\langle x_1 + x_2 - v_0, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Io conosco un v_0 con questa proprietà, cioè $P_V x_1 + P_V x_2$:

$$\langle x_1 + x_2 - P_V x_1 - P_V x_2, v \rangle = \underbrace{\langle x_1 - P_V x_1, v \rangle}_0 + \underbrace{\langle x_2 - P_V x_2, v \rangle}_0$$

Ma allora la tesi

per ipotesi

• Devo dim. che $P_V(\lambda x_0) = \lambda P_V(x_0)$ e anche questo lo faccio via caratterizzazione

(3) Somma diretta ortogonale

$$W = \ker(P_V) = \{x \in H : P_V x = 0\}$$

(caratt.)

$$= \{x \in H : \langle x, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V\} = V^\perp$$

Verifica che

• W è chiuso: controimmagine di 0 rispetto a funzione continua (1-lip)

• W è s.sp. vettoriale: ovvio (geom. 1)

- $V \cap W = \{0\}$: chi sta nell' n è $\perp$ a se stesso

- Ogni $x \in H$ si scrive come $x = \underbrace{v}_V + \underbrace{w}_W$

Basta porre $v := P_V x$ e $w = x - P_V x$
 $\in V$

e osservare che $w \in V^\perp$ in quanto dalla caratt. segue che

$$\underbrace{\langle x - P_V x, v \rangle}_w = 0 \quad \forall v \in V$$

— 0 — 0 —

Osservazioni

① Potrei dimostrare la parte di esistenza della proiezione sul convesso usando compattatezza debole delle palle + SCI della norma.

Però serve

- la separabilità (che invece non abbiamo usato)
- la compattatezza di $K \cap \overline{B}(x_0, R)$

② Se $K = \overline{B}(0, 1)$, allora

$$P_K(x) = \begin{cases} x & \text{se } \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{se } \|x\| > 1 \end{cases}$$

Dim. verificare la caratterizz. (il 1° caso è banale)

$$\langle x - \frac{x}{\|x\|}, y - \frac{x}{\|x\|} \rangle \stackrel{?}{\leq} 0 \quad \forall y \in \overline{B}(0, 1)$$

$$\langle x, y \rangle - \|x\| - \langle x, y \rangle \frac{1}{\|x\|} + 1 \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$\langle x, y \rangle \frac{\cancel{\|x\|} - 1}{\|x\|} \stackrel{?}{\leq} \frac{\cancel{\|x\|} - 1}{1}, \quad \langle x, y \rangle \stackrel{?}{\leq} \|x\|$$

+
perché $\|x\| > 1$

$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| \leq \|x\| \quad \text{😊}$

CONVESSO + STRONG $\Rightarrow$ WEAK

Teorema 1 Sia H uno sp. di Hilbert, e sia $K \subseteq H$ un convesso chiuso (forte).

Allora K è chiuso debole, cioè se $\{y_n\} \subseteq K$ e $y_n \rightarrow y_\infty$ allora $y_\infty \in K$.

Teorema 2 Sia H uno sp. di Hilbert, e sia $F: H \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(1) F è SCI forte, cioè

$$y_n \rightarrow y_\infty \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(y_n) \geq F(y_\infty)$$

(2) F è CONVESSA.

Allora F è SCI debole, cioè

$$y_n \rightarrow y_\infty \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(y_n) \geq F(y_\infty)$$

Teorema 0 (Separazione forte punto - convesso)

H sp. di Hilbert, $K \subseteq H$ convesso chiuso.

Allora esistono $u \in H$ e due numeri reali $\delta_2 > \delta_1$ tale che

$$\langle x_0, u \rangle = \delta_2 > \delta_1 \geq \langle y, u \rangle \quad \forall y \in K$$

$$\langle x, u \rangle = \delta_2$$

Dim. Guardando la figura pougo

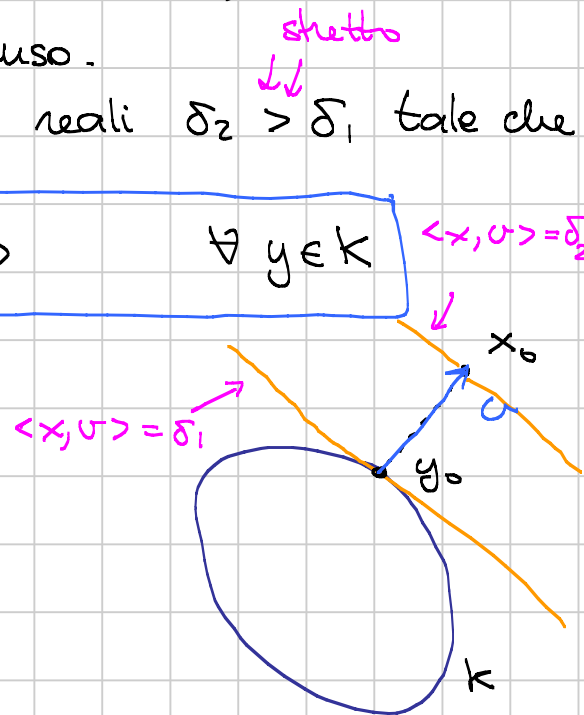
$$u := x_0 - P_K x_0$$

$$\delta_2 := \langle x_0 - P_K x_0, x_0 \rangle$$

$$\delta_1 := \langle x_0 - P_K x_0, P_K x_0 \rangle$$

Osservo che

$$\delta_2 - \delta_1 = \|x_0 - P_K x_0\|^2$$



Bisogna dim. che $\delta_1 \geq \langle y, x_0 - P_K x_0 \rangle \quad \forall y \in K$
cioè

$$\langle x_0 - P_K x_0, P_K x_0 \rangle \stackrel{?}{\geq} \langle y, x_0 - P_K x_0 \rangle$$

cioè

$$\langle y - P_K x_0, x_0 - P_K x_0 \rangle \leq 0$$

che è il solito angolo ottuso.



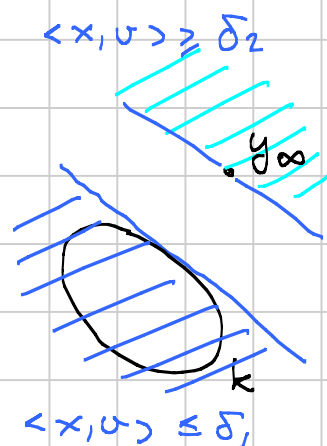
Dim. teo. 1

Sia $y_m \in K$ per ogni $m \in \mathbb{N}$

Supponiamo che $y_m \rightarrow y_\infty$

Vogliamo dim. che $y_\infty \in K$.

Supponiamo per assurdo che $y_\infty \notin K$. Ma allora per separazione strong esiste $u \in H$ tale che



$$\langle u, y_\infty \rangle = \delta_2 > \delta_1 \geq \underbrace{\langle u, y_m \rangle}_{\downarrow \langle u, y_\infty \rangle} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Dim. Teorema 2

Sia $y_m \rightarrow y_\infty$ debole. Voglio dim. che

$$l = \liminf F(y_m) \geq F(y_\infty)$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ considero

$$K_\varepsilon := \{x \in H : F(x) \leq l + \varepsilon\}$$

Allora

- K_ε è chiuso forte perché F è scf forte
- K_ε è convesso perché F è convessa

Ora $y_m \in K_\varepsilon$ per infiniti indici, diciamo su una s.succ., quindi $y_\infty \in K_\varepsilon$.

Da questo segue che

$$F(y_\infty) \leq L + \varepsilon$$

Visto che $\varepsilon > 0$ è arbitrario abbiamo la tesi.

[Per precisione dovei trattare a parte, nello stesso modo, il caso $L = -\infty$, scoprendo a posteriori che non si può]